Tehtävä 1

Hiukkasen nopeuden (1D liikkeessä) havaitaan olevan $v(x) = ax^p$, missä a ja p ovat vakiota.

(a) Laske hiukkaseen vaikuttava kokonaisvoima hiukkasen sijainnin x funktiona eli $F(x)$.

(b) Laske hiukkasen sijainti ajan funktiona eli $x(t)$ alkuehdolla $x(t_0) = x_0$ (separoituva differentiaaliyhtälö).

(c) Laske sitten $F(t)$, kun hiukkasen massa on m.

Ratkaisu:

Tiedetään $v(x)$, joten käytetään Newtonin 2. lakia ja ketjusääntöä, jonka avulla saadaan $F(x)$. Tämän jälkeen ratkaistaan $v = \dot{x} = ax^p$ separoimalla. Kun $p = 1$, tulee integraalista ulos logaritmi, joten käsitellään tämä tapaus erikseen. Lopuksi voidaan vain käyttää Newtonin 2. lakia voiman laskemiseen, kun tiedetään $x(t)$.

(a) Newtonin 2. laista ja ketjusäännöstä

$$F(x) = \dot{p} = m\dot{v} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = m(ax^p)(apx^{p-1}) = ma^2px^{2p-1}.$$

(b) Ratkaistaan yhtälö

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax^p$$

paikan $x = x(t)$ suhteen separoimalla, jolloin

$$x^{-p}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t.$$

Jos $p = 1$, niin yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = a\,\mathrm{d}t,$$

josta integroimalla saadaan

$$\log x = at + \tilde{C}$$

jollakin $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Tästä saadaan sitten, että

$$x = Ce^{at},$$

missä $C \in \mathbb{R}$. Alkuehdosta $x(t_0) = x_0$ saadaan, että

$$C = x_0e^{-at_0},$$

joten

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Jos taas $p \neq 1$, niin integroimalla saadaan

$$\frac{x^{1-p}}{1-p} = at + C,$$

jolloin

$$x = [(1-p)(at+C)]^{1/1-p}.$$

Alkuehdosta $x(t_0) = x_0$ saadaan, että

$$C = \frac{x_0^{1-p}}{1-p} - at_0,$$

joten

$$x = \left[(1-p)\left(a(t-t_0) + \frac{x_0^{1-p}}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

(c) Voima saadaan nyt suoraan Newtonin 2. laista:

$$F = F(t) = m\ddot{x}$$

eli

$$F(t) = \begin{cases} ma^2 x_0 e^{a(t-t_0)}, & p = 1 \\ ma^2 p \left[(1-p)\left(a(t-t_0) + \frac{x_0^{1-p}}{1-p}\right)\right]^{\frac{2p-1}{1-p}}, & p \neq 1 \end{cases}.$$

Voiman olisi voinut laskea myös (a)-kohdan avulla huomaamalla, että $F = F(x(t))$, mutta tällöin olisi pitänyt jälleen huomioida $p = 1$ erikseen.

Tehtävä 2

Tarkastellaan m-massaisen pallon putoamista, kun painovoiman $F_g = mg$ lisäksi palloon vaikuttaa nopeudesta riippuva vastusvoima $F_d = mkv^2$. Osoita, että pallon putoamisen kiihtyessä jostain alkunopeudesta v_1 nopeuteen v_2 (kumpikin nopeus alaspäin) pallon kulkema matka on

$$s(v_1 \to v_2) = \frac{1}{2k} \log\left(\frac{g - kv_1^2}{g - kv_2^2}\right).$$

Ratkaisu:

Ratkaistaan $x(t)$ Newtonin 2. lain avulla, jonka jälkeen sopivalla koordinaatiston valinnalla kuljettu matka saadaan suoraan $x(t)$:stä.

Valitaan suunta alaspäin positiiviseksi, jolloin pallon liikeyhtälöksi tulee Newtonin 2. lain nojalla

$$F = F_g - F_d = mg - mkv^2 = m\ddot{x}$$

eli

$$\ddot{x} = g - kv^2.$$

Ketjusäännöllä

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

joten separoimalla saadaan

$$\frac{v\,\mathrm{d}v}{g - kv^2} = \mathrm{d}x.$$

Integroimalla tästä tulee

$$-\frac{1}{2k}\log(g - kv^2) = x + C$$

jollakin $C \in \mathbb{R}$. Asetetaan koordinaatisto siten, että kun $v = v_1$, niin $x = x(v_1) = 0$, jolloin

$$C = -\frac{1}{2k}\log(g - kv_1^2).$$

Yhdistämällä nämä ja käyttämällä logaritmin laskusääntöja saadaan

$$x = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g - kv_1^2}{g - kv^2}\right).$$

Koska $x(v_1) = 0$, niin kuljettu matka on suoraan $x(v_2)$ eli

$$s(v_1 \to v_2) = x(v_2) - x(v_1) = x(v_2) = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g - kv_1^2}{g - kv_2^2}\right),$$

josta saatiin väite.

Tehtävä 3

Tarkastellaan yhtä hiukkasta, johon kohdistuu voima F, joka voi riippua eri tavoin hiukkasen sijainnista x, nopeudesta $\dot{x}$ ja ajasta t (1D liike). Missä seuraavista tapauksista liikeyhtälö $F = m\ddot{x}$ on integroitavissa?

(a) $F = F(x,t) = f(x)g(t)$,

(b) $F = F(\dot{x},t) = f(\dot{x})g(t)$,

(c) $F = F(x,\dot{x}) = f(x)g(\dot{x})$.

Kussakin kohdassa f ja g ovat tarkemmin määrittelemättömiä funktiota.

Ratkaisu:

Yritetään jokaisessa kohdassa separoida yhtälö ja katsotaan, mitä tapahtuu.

(a) Yritetään separoida liikeyhtälöä:

$$F = f(x)g(t) = m\ddot{x} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t},$$

jolloin

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{f(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Huomataan, että vasen puoli ei separoitunut, sillä integroitavana olisi muuttaja $\dot{x}$, mutta funktio f riippuu muuttujasta x, joten yhtälö ei ole integroituva.

(b) Separoidaan liikeyhtälö

$$F = f(\dot{x})g(t) = m\ddot{x} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t},$$

jolloin

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{f(\dot{x})} = g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mikäli $1/f(\dot{x})$ ja $g(t)$ ovat integroituvia funktiota, on yhtälö integroituva puolittain.

(c) Separoidaan jälleen liikeyhtälö

$$F = f(x)g(\dot{x}) = m\ddot{x} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}.$$

Ketjusäännöllä

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

joten liikeyhtälöksi tulee

$$f(x)g(\dot{x}) = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x},$$

josta saadaan

$$m\frac{\dot{x}\,\mathrm{d}\dot{x}}{g(\dot{x})} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mikäli molempien puolten funktiot ovat integroituvia, voidaan yhtälö ratkaista. Siispä yhtälö on integroituva.

(a)-kohdassa separointi ei vain onnistunut, joten tehdään tästä johtopäätös, että yhtälö ei ole integroituva. (b)- ja (c)-kohdissa separointi onnistui, mutta (c)-kohdassa piti “pakottaa” oikea muuttuja ketjusäännöllä.

Tehtävä 4

Moottoriveneen moottori sammuu hetkellä $t = 0$, jolloin sen nopeus on v_0. Tämän jälkeen veneen liikkeeseen vaikuttaa ainoastaan vastusvoima, joka on muotoa $F_d = -mke^{qv}$, missä v on veneen nopeus, m on veneen massa ja k ja q ovat positiivisia vakiota.

(a) Laske lauseke veneen nopeudelle ajan funktiona eli $v(t)$.

(b) Odotetaan, kunnes vene pysähtyy. Laske tähän kulunut aika.

(c) Laske veneen kulkema matka.

Ratkaisu:

Ratkaistaan aluksi nopeus liikeyhtälö käyttäen separointia ja Newtonin 2. lakia. Kun $v(t)$ tiedetään, voidaan helposti etsiä sen nollakohta eli milloin vene pysähtyy. Tämän jälkeen kuljettu matka voidaan laskea integroimalla nopeuden yli.

(a) Newtonin 2. laista saadaan liikeyhtälö

$$F = -mke^{qv} = m\dot{v},$$

eli

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ke^{qv}.$$

Separoidaan aluksi muuttujat

$$e^{-qv}\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}t,$$

jolloin integroimalla puolittain saadaan, että

$$-\frac{1}{q}e^{-qv} = -kt - C$$

jollakin $C \in \mathbb{R}$. Ratkaisemalla tästä v saadaan

$$v = -\frac{1}{q}\log\left(ktq + Cq\right).$$

Alkuehdosta $v(0) = v_0$ puolestaan saadaan, että

$$C = e^{-qv_0}.$$

Siispä

$$v = -\frac{1}{q}\log\left(qkt + e^{-qv_0}\right).$$

(b) Vene pysähtyy kun $v = 0$, joten pysähtymiseen kuluva aika saadaan yhtälöstä $v(t_s) = 0$. Ratkaisuksi saadaan siten

$$t_s = \frac{1 - e^{-qv_0}}{kq}.$$

(c) Veneen kulkema matkaa saadaan nyt nopeuden integraalina aikavälillä, jolla vene liikkui:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{t_s} v(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{q}\int_0^{t_s} \log\left(qkt + e^{-qv_0}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{q}\left[\frac{(qkt + e^{-qv_0})\log(qkt + e^{-qv_0})}{kq} - t\right]_0^{\frac{1-e^{-qv_0}}{kq}} = \frac{1 - e^{-qv_0}(1 + qv_0)}{kq^2}.
\end{aligned}
$$

(a)-kohdassa tehtiin suoraviivainen separointi, samoin (b)-kohdassa melko yksinkertainen yhtälön ratkaisu. (c)-kohdassa integrointiin piti soveltaa muuttujanvaihtoa ja joko taulukoita integraalia tai osittaisintegrointia.

Tehtävä 5

Kappale, jonka massa on m, liikkuu kitkattomasti pitkin kaltevaa tasoa (kallistuskulma a) siten, että siihen vaikuttaa painovoiman $F_g = mg$ lisäksi vastusvoima $F_d = kmv^2$. Jos kappale lähtee levosta, osoita että siltä kuluu matkaan s aika $t(s) = \cosh^{-1}(e^{ks})/\sqrt{kg\sin\alpha}$.

Ratkaisu:

Ratkaistaan $x(t)$ liikeyhtälöstä vaiheittain: ensin ratkaistaan $v = \dot{x}$ ja sitten vasta x. Molemmat yhtälöt separoituvat, mutta varsinaiset integraalit lasketaan Mathematicalla. Kun $x(t)$ tiedetään, matkaan kulunut aika $t(s)$ on paikan käänteisfunktio.

Tilannetta voidaan käsitellä yksiulotteisena, sillä taso pakottaa kappaleen liikkumaan tasoa pitkin. Erityisesti riittää huomioida kappaleen liikkeen suuntaiset voimat. Valitaan koordinaatisto siten, että positiivinen x-akseli osoittaa alaspäin liikkeen suuntaan. Vastusvoima suuntautuu liikkeen suuntaa vastaan, joten se saa negatiivisen etumerkin. Painovoima suuntautuu suoraan alaspäin, mutta vain liikkeen suuntainen komponentti tarvitsee huomioida. Jakamalla voima komponentteihin nähdään, että painovoiman liikkeen suuntainen komponentti on $F_g \sin\alpha$. Tällöin kokonaisvoimaksi tulee

$$F = F_g \sin\alpha - F_d = m(g\sin\alpha - kv^2).$$

Newtonin 2. lain avulla

$$F = m(g\sin\alpha - kv^2) = m\ddot{x}$$

eli

$$g\sin\alpha - k\dot{x}^2 = \ddot{x}.$$

Ratkaistaan saatu differentiaaliyhtälö alkuarvoilla $x(0) = v(0) = 0$ separoimalla. Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$g\sin\alpha - kv^2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

jolloin separoimalla saadaan

$$\frac{\mathrm{d}v}{g\sin\alpha - kv^2} = \mathrm{d}t.$$

Integroimalla puolittain saadaan Mathematican avulla

$$\frac{\tanh^{-1}\left(v\sqrt{\frac{k}{g\sin\alpha}}\right)}{\sqrt{kg\sin\alpha}} = t + C_1$$

jollakin $C_1 \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan yhtälö nopeuden suhteen saadaan

$$v = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{k}}\tanh\left((t + C_1)\sqrt{kg\sin\alpha}\right).$$

Alkuehto $v(0) = 0$ antaa, että $C_1 = 0$. Separoidaan yhtälö vielä kerran:

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{k}} \tanh\left(t\sqrt{kg\sin\alpha}\right) \mathrm{d}t.$$

Integroidaan jälleen Mathematican avulla, jolloin tulokseksi tulee

$$x = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{k}} \frac{\log\left(\cosh\left(t\sqrt{kg\sin\alpha}\right)\right)}{\sqrt{kg\sin\alpha}} + C_2.$$

Alkuehto $x(0) = 0$ antaa, että $C_2 = 0$. Siispä

$$x = x(t) = \frac{1}{k} \log\left(\cosh\left(t\sqrt{kg\sin\alpha}\right)\right).$$

Haluttu tulos saadaan sitten ratkaisemalla funktion $x(t)$ käänteisfunktio yhtälöstä $x(t) = s$, jolloin jälleen Mathematicalla saadaan, että

$$t = t(s) = \frac{\cosh^{-1}\left(e^{kt}\right)}{\sqrt{kg\sin\alpha}},$$

kun valitaan positiivinen ja reaalinen ratkaisu.

Integraalit sisälsivät hyperbolisia funktiota, joten niiden integrointi jätettiin suosiolla Mathematicalle. Alkuehdot oli kuitenkin helppo ratkaista käsinkin. Myös käänteisfunktion etsiminen sujuu käsin.

Tehtävä 6

TIM-materiaalissa todettiin, että massan additiivisuus voidaan osoittaa tarkastelemalla kolmea massallista hiukkasta (massat m_1, m_2 ja m_3), joista kaksi (vaikkapa m_2 ja m_3) on kiinnitetty toisiinsa. Tee tämä päättely ottaen lähtökohdaksi voiman additiivisuus kiinnittäen huomioita päättelyn kunkin välivaiheen pitävyyteen.

Ratkaisu:

Osoitetaan, että kahden toisiinsa kiinnitetyn massa käytettyy additiivisesti eli kun $M = m_2 + m_3$, niin voimat ovat samat. Kahden kappaleen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa voimien summana, jolloin kappaleiden toisiinsa kohdistamat voimat kumoutuvat Newtonin 3. lain nojalla. Jäljelle jää ikäänkuin yhden kappaleen liikeyhtälö.

Kappaleeseen 2 kohdistuu voima $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32}$, missä $\mathbf{F}_{12}$ on 1. kappaleen 2. kappaleeseen kohdistama voima ja $\mathbf{F}_{32}$ on 3. kappaleen 2. kappaleeseen kohdistama voima. Kokonaisvoimaan käytettiin voimien additiivisuutta.

Vastaavasti 3. kappeleeseen kohdistuu voima $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$. Newtonin 2. lain avulla

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3.$$

Koska kappaleet 2 ja 3 ovat kiinni toisissaan, niiden kiihtyvyydet ovat samat eli $\mathbf{a} := \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$. Merkitään myös $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$, mikä on sallittua voimien additiivisuuden nojalla. Näin ollen

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{23} = (m_2 + m_3)\mathbf{a}.$$

Newtonin 3. lain nojalla $\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23}$, joten

$$\mathbf{F} = (m_2 + m_3)\mathbf{a}.$$

Tästä nähdään, että liikeyhtälö on ekvivalentti yhtälön

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}$$

kanssa, missä $M = m_2 + m_3$ eli hidas massa käyttäytyy additiivisesti.