Tehtävä 1

Osoita, että kriittisesti vaimennetun harmonisen värähtelijän ($\omega_0 = \beta$, luentonuottien kohta 2.4.c) liikeyhtälön $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = 0$ ratkaisu on $x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$ arvaamalla, että $x(t)$ on muotoa $x(t) = f(t)e^{-\beta t}$, sijoittamalla tämä muoto värähtelijän liikeyhtälöön, ja ratkaisemalla funktio $f(t)$. *[Lisäkysymys: Mistä tiedät, että tämä on täydellinen ratkaisu?]*

Ratkaisu:

Aloitetaan tekemään tehtävää tehtävänannossa annettujen ohjeiden mukaisesti.

Lähdetään liikkeelle yritteestä $x(t) = f(t)e^{-\beta t}$, missä $f(t)$ on ainakin kahdesti derivoituva funktio. Tällöin tulon derivaatan nojalla $\dot{x} = e^{-\beta t}(f'(t) - \beta f(t))$ ja $\ddot{x} = e^{-\beta t}(f''(t) - 2\beta f'(t) + \beta^2 f(t))$. Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$e^{-\beta t}(f''(t) - 2\beta f'(t) + \beta^2 f(t)) + 2\beta e^{-\beta t}(f'(t) - \beta f(t)) + \beta^2 e^{-\beta t} f(t) = 0.$$

Koska $e^{-\beta t} > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, täytyy olla

$$f''(t) - 2\beta f'(t) + \beta^2 f(t) + 2\beta f'(t) - \beta f(t) + \beta^2 f(t) = 0.$$

Sieventämällä saadaan

$$f''(t) = 0,$$

josta saadaan helposti integroimalla, että $f(t) = A + Bt$ joillakin $A, B \in \mathbb{R}$. Lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla, sillä liikeyhtälö on homogeeninen ja lineaarinen toisen asteen differentiaaliyhtälö.

Tehtävä oli annetuilla ohjeilla varsin suoraviivainen lasku, jossa riitti oikeastaan huomata, että $e^{-\beta t} \neq 0$, jolloin yhtälö ratkeaa helposti.

Tehtävä 2

Paikasta

https://tim.jyu.fi/view/kurssit/fysiikka/fysa2020kevat2020/python/varahtelija

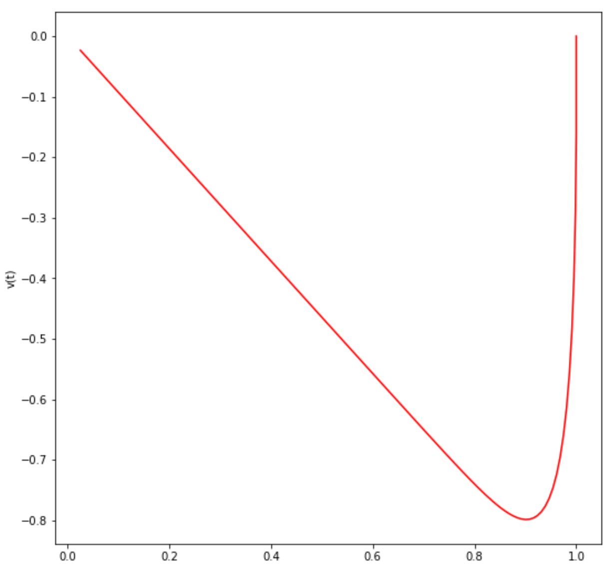
löydät sktriptin, joka simuloi vaimennettua harmonista värähtelijää (parametrit ω_0, β) ja pakotettua harmonista värähtelijää sinimuotoisella ajavalla voimalla (lisäksi parametrit A, ω) yksiulotteisessa tapauksessa.

(a) Olkoon ensin $A = 0$, $\omega = 0$ eli luentonuottien luvun 2.4 tilanne. Tutki ylivaimennettua värähtelijää, jolle $\omega_0 < \beta$, tapauksessa $\omega_0 = 4$, $\beta = 9$. Tuota kolme kvalitatiivisesti erilaista faasiavaruusrataa $(x(t), v(t))$ valiten sopivat alkuehdot (x_0, v_0). Tehtävän palautukseen kussakin tapauksessa kirjoita käyttämäsi alkuehdot ja hahmottele faasiavaruusrata $(x(t), v(t))$ paperille.

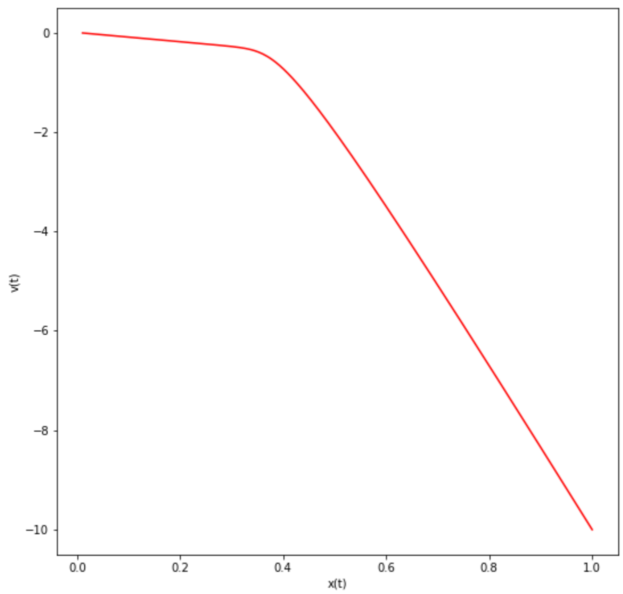
(b) Olkoon $\omega_0 = 5$, $\beta = 1$. Lisätään pakkovoima asettamalla $A > 0$, $\omega > 0$ eli luentonuottien luvun 2.5 tilanne. Valitse nyt A ja ω siten, että pääset kohtuullisella tarkkuudella testaamaan luentojen kaavaa $D = A/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$. Joutunet pidentämään simulaatiota eli kasvattamaan parametria *nsteps*. Ilmoita vastauksessa parametrien arvot sekä simulaatiokuvasta arvioitu D ja D:lle kaavasta laskettu arvo.

Ratkaisu:

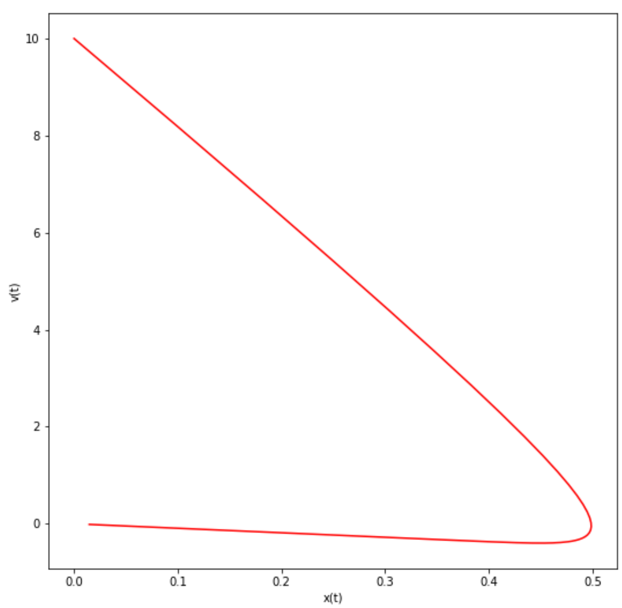
Piirretään faasiavaruusratoja eri tilanteisiin annetuilla parametreilla. (b)-kohtaan valitaan sellaiset parametrit, että D on järkevän suuruinen eli ettei siitä tule liian suuri tai pieni, jolloin jouduttaisiin liukulukulaskennan kanssa ongelmiin.



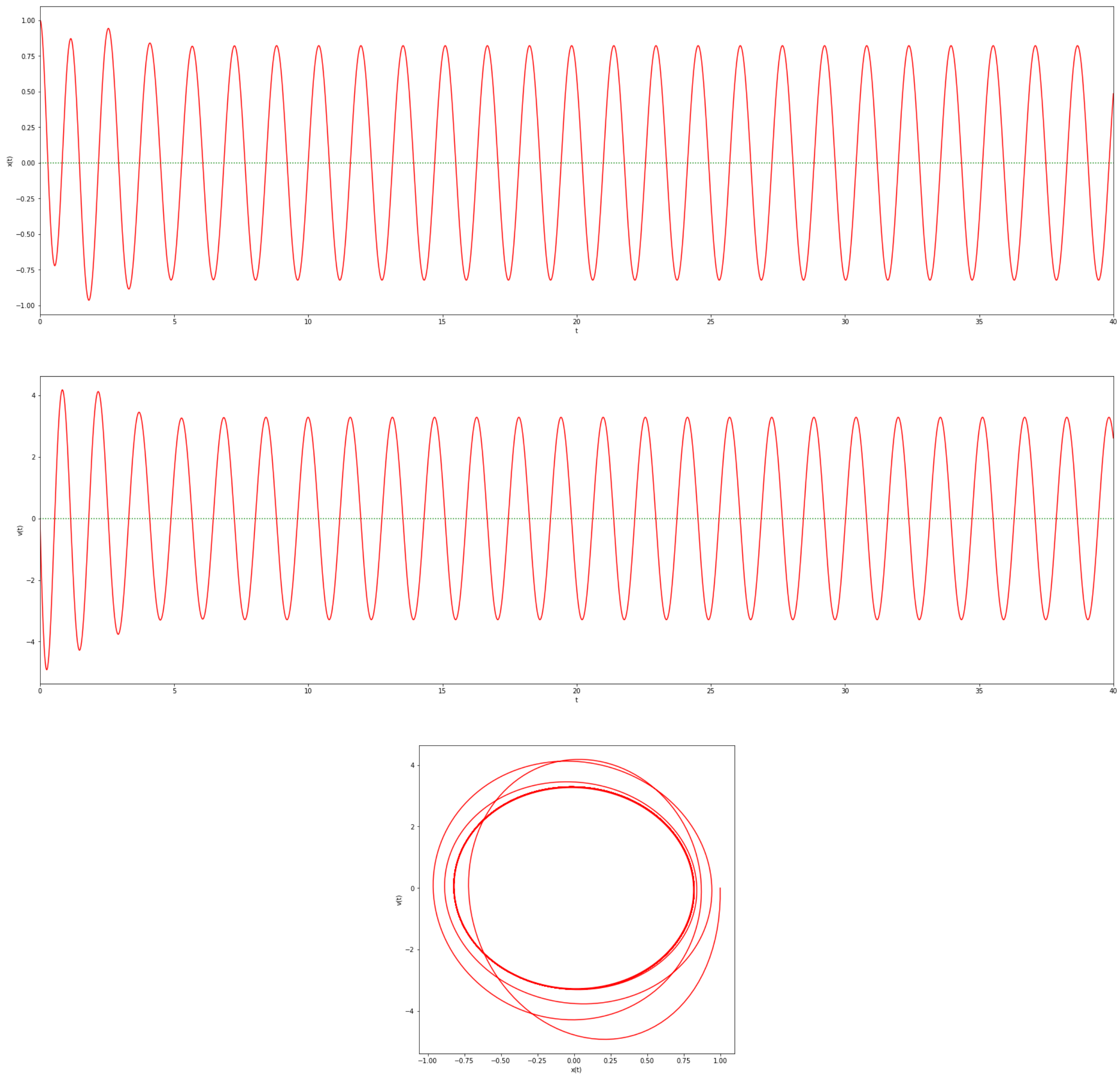
Kuva 1: Faasiavaruusrata alkuehdoilla $x_0 = 1$, $v_0 = 0$. Vastaa tilannetta, jossa värähtelijä palaa tasapainoasemaan pelkästään “omalla painollaan”.



Kuva 2: Faasiavaruusrata alkuehdoilla $x_0 = 1$, $v_0 = -10$. Vastaa tilannetta, jossa värähtelijä lähtee tasapainopisteen ulkopuolelta, mutta alkunopeus on valmiiksi liikkeen suuntaan, joten paluu tasapainoasemaan tapahtuu nopeasti.



Kuva 3: Faasiavaruusrata alkuehdoilla $x_0 = 0$, $v_0 = 10$. Vastaa tilannetta, jossa on jo alun perin tasapainopisteessä, mutta alkunopeudesta johtuen värähtelijä käy hetkellisesti tasapainoaseman ulkopuolella.



Kuva 4: Simulaatiotulokset alkuehdoilla $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ ja parametreilla $A = 10$, $\omega = 4$. Askelmääränä käytettiin $n = 4000$.

Tekemällä simulaatiodataan sovitus funktiolle $D \cos \omega t$, saadaan amplitudille arvo $D \approx 0.80$. Teoreettinen arvo on puolestaan

$$\begin{aligned} D &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{5}{29}} \approx 0.83. \end{aligned}$$

Tulokset vastaavat toisiaan kohtuullisella tarkkuudella.

Tehtävä 3

Osoita, että pakotetun harmonisen värähtelijän erityisratkaisun $x_p(t) = D\cos(\omega t - \delta)$ [luennot (2.22)] parametrien lausekkeet ovat $D = A/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2}$ ja $\delta = \tan^{-1}[2\omega\beta/(\omega_0^2 - \omega^2)]$. Pohdi ja vastaa: Miksi (fysikaalisestiki) tähän erityisratkaisuun ei jää vapaita parametreja? Mitä tapahtuu, kun β on pieni (jossain mielessä)?

Ratkaisu:

Lähdetään liikkeelle sijoittamalla erityisratkaisu takaisin liikeyhtälöön. Trigonometrisia summakaavoja käyttäen yhtälö saadaan muotoon $\alpha \sin\omega t + \beta\cos\omega t = 0$. Sini ja kosini muodostavat ratkaisukannan, joten yhtälö totetutuu jos ja vain jos $\alpha = \beta = 0$. Näin yhdestä yhtälöstä saatiin yhtälöpari, jolloin parametrit δ ja D voidaan ratkaista algebraallisesti.

Erityisratkaisun aikaderivaatoiksi tulee $\dot{x} = \omega D\sin(\omega t - \delta)$ ja $\ddot{x} = -\omega^2 D\cos(\omega t - \delta)$. Sijoittamalla nämä sinimuotoisella voimalla ajetun värähtelijän liikeyhtälöön $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$ saadaan

$$-\omega^2 D\cos(\omega t - \delta) + 2\beta\omega D\sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D\cos(\omega t - \delta) = A\cos\omega t.$$

Käyttämällä trigonometrisia summakaavoja, saadaan

$$D(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta) + 2\omega\beta D(\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta) - A\cos\omega t = 0.$$

Järjestelemällä termejä uudelleen saadaan

$$[A - D\cos\delta(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega\beta\sin\delta]\cos\omega t - [D\sin\delta(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega\beta\cos\delta]\sin\omega t = 0. \tag{1}$$

Wronskin determinantti sini- ja kosinifunktioille on

$$W = \det\begin{bmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{bmatrix} = -\omega \neq 0,$$

joten $\{\sin\omega t, \cos\omega t\}$ on lineaarisesti riippumaton. Näin ollen yhtälö (1) toteutuu jos ja vain jos kertoimet ovat identtisesti nollia eli

$$\begin{cases} A - D\cos\delta(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega\beta\sin\delta = 0 \\ D\sin\delta(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega\beta D\cos\delta = 0 \end{cases}.$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan, että

$$\tan\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Samaistamalla yllä saatu yhtälö suorakulmaiseksi kolmioksi, saadaan trigonometristen funktioiden määritelmistä ja Pythagoran lauseesta

$$\sin\delta = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \quad \text{ja} \quad \cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}.$$

Ratkaisemalla yhtälöparin ylempi yhtälö muuttujan D saadaan sijoittamalla $\sin\delta$ ja $\cos\delta$, että

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{A}{\cos\delta(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega\beta\sin\delta} \\
&= \frac{A\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2} \\
&= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}.
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan sitten, mitä tapahtuu, kun $\beta \to 0$. Taylorin sarjakehitelmiksi saadaan

$$\delta \cong \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}$$

ja

$$D \cong \frac{A}{\left|\omega_0^2-\omega^2\right|}.$$

Oleellinen osa ratkaisua oli huomata, että sini ja kosini muodostavat ratkaisukannan, jolloin yhdestä yhtälöstä saatiin yhtälöpari, mikä mahdollistaa kahden parametrin yksikäsitteisen ratkaisun. Tämä toimii fysikaalisestikin, sillä sinin ja kosinin välinen vaihe-ero on $\pi/2$ eli ne eivät voi summautua nollaksi muualla kuin yksittäisissä pisteissä.

Tehtävä 4

Tavallisen m-massaisen harmonisen värähtelijän liikeyhtälö on $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, missä $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ olettaen konservatiivinen jousivoima $F = -kx$.

(a) Laske aikakeskiarvot yhtä jaksoa kohti sen liike-energialle T ja potentiaalienergialle U.

(b) Laske sitten paikkakeskiarvot yhtä jaksoa kohti samoille suureille.

Ratkaisu:

Aikakeskiarvot voidaan suoraan integroida, kunhan lasketaan ensin x ja $\dot{x}$. Nämä saadaan liikeyhtälön ratkaisusta ja sen derivaatasta. Paikkakeskiarvot integroidaan myös, mutta tällöin $\dot{x}$ pitää pystyä jotenkin ilmaisemaan x avulla.

(a) Harmonisen värähtelijän yleinen ratkaisu on prujun perusteella

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta),$$

jolloin sen liike-energiaksi tulee $T(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA\omega_0\cos(\omega_0 t - \delta)$. Liike-energian aikakeskiarvoksi tulee siten

$$\begin{aligned}
\langle T\rangle &= \frac{1}{2}m\langle \dot{x}^2\rangle = \frac{m}{2\tau_0}\int_0^{\tau_0} \dot{x}^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{m}{2\tau_0}\int_0^{\tau_0} A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t - \delta)\,\mathrm{d}t = \frac{A^2 m\omega_0^2}{2\tau_0}\int_0^{\tau_0}\cos^2(\omega_0 t - \delta)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Tekemällä muuttujanvaihto $u = \omega_0 t - \delta$ saadaan, että

$$\langle T\rangle = \frac{A^2 m\omega_0}{2\tau_0}\int_{-\delta}^{2\pi-\delta}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{A^2 m\omega_0\pi}{2\tau_0} = \frac{A^2 m\omega_0^2}{4} = \frac{1}{4}kA^2.$$

Vastaavasti $U(t) = \frac{1}{2}kx^2$, joten vastaavalla muuttujanvaihdolla saadaan

$$\langle U\rangle = \frac{1}{2}k\langle x^2\rangle = \frac{k}{2\tau_0}\int_0^{\tau_0} A^2\sin^2(\omega_0 t - \delta)\,\mathrm{d}t = \frac{kA^2\omega_0}{2\tau_0}\int_{-\delta}^{2\pi-\delta}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}kA^2.$$

Tulos on järkevä, sillä näistä saadaan tuttu tulos

$$\langle E\rangle = \langle T + U\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle = \frac{1}{2}kA^2.$$

(b) Huomataan aluksi, että

$$\dot{x}^2 = A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t - \delta) = A^2\omega_0^2(1 - \sin^2(\omega_0 t - \delta)) = A^2\omega_0^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = \omega_0^2(A^2 - x^2),$$

jolloin liike-energian paikkakeskiarvoksi tulee

$$\overline{T} = \frac{1}{A}\int_0^A \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \,\mathrm{d}x = \frac{m\omega_0^2}{2A}\int_0^A (A^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{m\omega_0^2}{2A}\left(A^3 - \frac{1}{3}A^3\right) = \frac{1}{3}kA^2.$$

Potentiaalienergian paikkakeskiarvo saadaan suoraviivaisemmin:

$$\overline{U} = \frac{1}{A}\int_0^A \frac{1}{2}kx^2 \,\mathrm{d}x = \frac{k}{2A}\int_0^A x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}kA^2.$$

Näistä nähdään, että $\overline{T} = 2\overline{U}$.

Tehtävä 5

Pistemäinen m-massainen hiukkanen liukuu kitkatta vaakasuoralla pinnalla siten, että se on kuvan mukaisesti kiinnitetty vastakkaisesta päästään akselin ympäri vapaasti pyörimään pääsevään massattomaan jouseen, jonka lepopituus on a. Hiukkasen ollessa etäisyydellä r akselista $F(r) = -k(r-a)$, missä k on jousivakio.

(a) Millä kulmanopeudella Ω hiukkanen kulkee ympyrärataa, jonka säde on R?

(b) Mikä on pienten värähtelyjen kulmataajuus ω, kun hiukkanen on approksimatiivisesti ympyräradalla ja värähtely tuottaa pieniä poikkeamia siitä?

(c) Pohdi millaisen efektiivisen potentiaalin $U_{\text{eff}}(r)$ hiukkanen liikkeen aikana kokee?

Ratkaisu:

(a) Oletetaan, että $r(t) = R$. Tämä vastaa tasapainotilaa, jolloin peruskursseilta tiedetään, että

$$|F(R)| = k(R-a) = m\Omega^2 R.$$

Ratkaisemalla tämä saadaan kulmanopeudeksi

$$\Omega = \sqrt{\frac{k(R-a)}{mR}}.$$

(b) Pyörimismäärä L säilyy, joten tilanteen efektiivinen potentiaali on[1]

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

missä

$$U(r) = -\int_0^r F(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{2}k(r-a).$$

Taylorin sarja-approksimaation avulla

$$\begin{aligned} U(r) &= U(R) + U'(R)(r-R) + \frac{1}{2}U''(R)(r-R)^2 + \cdots \\ &\cong \frac{1}{2}U''(R)(r-R)^2 \\ &= \frac{1}{2}(r-R)^2\left(k + \frac{3L^2}{mR^4}\right). \end{aligned}$$

Approksimoinnissa hyödynnettiin tietoa, että potentiaali minimoituu, kun $U'_{\text{eff}}(r) = 0$ ja tässä R on tasapainoetäisyys, joten $U'_{\text{eff}}(R) = 0$. Lisäksi potentiaali ei ole yksikäsitteinen, joten voidaan valita $U(R) = 0$.

[1] En osaa perustella tätä. Kurssikirjassa efektiivinen potentiaali määritellään näin 8. kappaleessa.

Kun ajatellaan, että potentiaali kuvaa harmonista potentiaalia $U(r) = \frac{1}{2}k'(r-R)^2$, saadaan, että

$$k' = k + \frac{3L^2}{mR^4}.$$

Lisäksi, koska $U'_{\text{eff}}(R) = 0$, niin

$$U'_{\text{eff}}(R) = k(R-a) - \frac{L^2}{mR^3} = 0 \iff L^2 = mR^3k(R-a).$$

Tämän efektiivisen värähtelyn kulmataajuus on siten

$$\begin{aligned}\omega = \sqrt{k'/m} &= \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{3L^2}{m^2R^4}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{3mR^3k(R-a)}{m^2R^4}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{3k(R-a)}{mR}}.\end{aligned}$$

Jos oletetaan, että $k \ll m$, niin tällöin

$$\omega \cong \sqrt{\frac{3k(R-a)}{mR}} = \sqrt{3}\Omega.$$

(c) (b)-kohdasta tiedetään, että $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + L^2/2mr^2$ ja $L^2 = mR^3k(R-a)$, joten nämä yhdistämällä

$$\begin{aligned}U_{\text{eff}}(r) &= \frac{1}{2}k(r-a)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \\ &= \frac{1}{2}k(r-a)^2 + \frac{mR^3k(R-a)}{2mr^2} \\ &= \frac{1}{2}k\left((r-a)^2 + \frac{R^3(R-a)}{r^2}\right).\end{aligned}$$

En osannut tehdä tätä tehtävää niin kuin se oli varmaankin ajateltu tehtäväksi. Kaikkialla (kirjassa ja internetissä) käytettiin jollakin tavalla efektiivisen potentiaalin käsitettä. Kun efektiivisen potentiaalin saa laskettua, sen jälkeen tehtävä avautuu: approksimoidaan potentiaalia Taylorin sarjan avulla niin, että se saadaan näyttämään harmoniselta potentiaalilta. Tästä saadaan "jousivakio" k' värähtelylle, jonka jälkeen käytetään relaatiota $\omega = \sqrt{k'/m}$. (a)-kohta menee suoraan peruskurssien tiedoilla kun oletetaan, että R on tasapainoetäisyys.

Tehtävä 6

Isoisän seinäkellossa tahdin pitää heiluri, jonka pituus on 0,7 m ja jonka päässä on massa 0,4 kg. Heilahduksen amplitudin 0,03 rad pitää vakiona viikossa 0,8 m alaspäin liikkuva punnus, jonka massa on 2 kg. Mikä on tämän pakotetun harmonisen värähtelijän Q-tekijän arvo?

Ratkaisu:

Lasketaan aluksi heilurin mekaaninen energia kulma-amplitudin Θ funktiona. Tiedetään, että amplitudi vaimenee eksponentiaalisesti, joten nämä yhdistämällä voidaan laskea yhden periodin aikana vastusvoimien hukkaama energia. Tästä voidaan suoraviivaisesti laskea viikon aikana tapahtuva energiahukka. Tämä hukka täytyy kuitenkin kompensoitua, jotta amplitudi pysyy vakiona. Kompensaatio tulee punnuksen potentiaalienergiasta, jonka täytyy olla yhtä suuri kuin energiahukka. Saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista vaimennuskerroin β, jolloin Q-arvo voidaan laskea.

Merkitään $\ell = 0{,}7\,\mathrm{m}$, $m = 0{,}4\,\mathrm{kg}$, $\Theta_0 = 0{,}03\,\mathrm{rad}$, $h = 0{,}8\,\mathrm{m}$, $d = 1\,\mathrm{vko}$ ja $M = 2\,\mathrm{kg}$. Värähtelyn amplitudi Θ vaimenee eksponentiaalisesti:

$$\Theta(t) = \Theta_0 e^{-\beta t}.$$

Kun heiluri on ääriasennossa, sen mekaaninen energia on puhtaasti potentiaalienergiaa, jolloin tilanteen geometriasta nähdään, että

$$E = mg\ell(1 - \cos\Theta).$$

Energian säilyminen takaa, että tämä pätee myös silloin, kun heiluri ei ole ääriasennossa. Kun oletetaan, että Θ on pieni (seinäkellolle tämä on järkevä oletus), niin Taylorin sarjakehitelmän avulla

$$E = mg\ell(1 - \cos\Theta) \cong \frac{1}{2} mg\ell\Theta^2.$$

Heiluri on kuitenkin vaimeneva, joten vastusvoimat vievät systeemistä energiaa. Yhden periodin τ_0 aikana energiaa häviää

$$\Delta E(\tau_0) = E(\tau_0) - E(0) \cong \frac{1}{2} mg\ell\Theta_0^2 \left(1 - e^{-2\beta\tau_0}\right).$$

Jos puolestaan oletetaan, että β on pieni (seinäkellojen käyttötarkoituksesta johtuen vaimennustermi pyritään suunnitelun/valmistuksen yhteydessä minimoimaan), saadaan jälleen Taylorin sarjakehitelmän avulla

$$\Delta E(\tau_0) \cong \frac{1}{2} mg\ell\Theta_0^2 \left(1 - e^{-2\beta\tau_0}\right) \cong \frac{1}{2} mg\ell\Theta_0^2 (2\beta\tau_0) = mg\ell\Theta_0^2\beta\tau_0.$$

Viikon aikana energiahäviö on yhteensä

$$\Delta E = \Delta E(d) = \Delta E(\tau_0)\frac{d}{\tau_0} \cong mg\ell\Theta_0^2\beta d.$$

Jotta amplitudi pysyisi vakiona, punnuksen potentiaalienergian täytyy kompensoida vastusvoimiin hävinnyttä energiaa eli $\Delta U = \Delta E$, joten

$$Mgh = mg\ell\Theta_0^2\beta d.$$

Ratkaisemalla vaimennusvakio β saadaan

$$\beta = \frac{Mh}{m\ell\Theta_0^2 d}.$$

Hyvyystekijäksi saadaan sitten suoraviivaisesti

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{2\beta} = \frac{\sqrt{g/\ell - 2\beta^2}}{2\beta},$$

sillä peruskursseilta tiedetään, että heilurille $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. Sijoittamalla lukuarvot tähän saadaan, että

$$Q \approx 178{,}27.$$

Ratkaisussa käytettiin muutamaan otteeseen Taylorin sarjakehitelmiä origossa kehitettynä, joilla päästiin eroon kosini- ja eksponenttifunktioista.