Tehtävä 1

Tarkastele ideaalista (ei vastusvoimia, vakiopainovoima $-mg$) heittoliikettä xy-tasossa siten, että pallon y-koordinaatti on vertikaalinen ja x-koordinaatti horisontaalinen.

(a) Kirjoita systeemin Lagrangen funktio ja johda siitä Eulerin-Lagrangen yhtälöitä (ELY) käyttäen liikeyhtälöt pallon koordinaateille $x(t)$ ja $y(t)$.

(b) Ratkaise liikeyhtälöistä $x = x(t)$ ja $y = y(t)$. Osoita, että pallo liikkuu peruskurssilta tuttua paraabelirataa.

Ratkaisu:

(a)-kohdassa kirjoitetaan liike-energia T karteesisessa koordinaatistossa Pythagoraan lauseen avulla. Potentiaalienergia saadaan tutun $U = mgh$ avulla. Kirjoitetaan näiden avulla L, derivoidaan sitä sopivasti ja kirjoitetaan ELY:n avulla liikeyhtälöt molemmille muuttujille (x ja y) erikseen. (b)-kohdassa ratkaistaan (a)-kohdan liikeyhtälöt.

(a) Pythagoraan lauseen avulla kineettiseksi energiaksi tulee

$$T = T(\dot{x}, \dot{y}; t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$

Potentiaalienergia riippuu vain painovoimasta ja siten y-koordinaatista eli

$$U = U(y; t) = mgy.$$

Lagrangen funktioksi tulee siten

$$L(y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy.$$

Kirjoitetaan liikeyhtälöt erikseen x- ja y-suunnille. x-suunnassa

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}.$$

Liikeyhtälöksi tulee Eulerin-Lagrangen yhtälön nojalla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{eli} \quad m\ddot{x} = 0.$$

Vastaavasti y-suunnassa

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y},$$

jolloin ELY:ksi saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{eli} \quad m\ddot{y} = mg.$$

(b) Asetetaan alkuehdoiksi $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ja $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, jolloin integroimalla liikeyhtälöitä saadaan

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \\ y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Ratkaisusta nähdään, että koska x riippuu lineaarisesti ajasta ja $y(t)$ on paraabelin yhtälön, niin kappaleen liikeratakin on paraabeli.

Tehtävä 2

Heiluri on yläpäästään ripustettu sauva, jonka heilahdukset pysyvät kuvan tasossa ja joka on alapäästään kiinni jousessa. Heilurin massa m olkoon tasaisesti jakautunut sauvan koko pituudelle. Sauvan pituus olkoon ℓ. Systeemi on tasapainossa, kun $\theta = 0$. Jousivakio olkoon $k > 0$ ja jousi hyvänä approksimaationa pysyköön vaakasuorassa.

(a) Muodosta T:n, U:n ja L:n lausekkeet muuttujina θ ja $\dot{\theta}$.

(b) Johda heilurin liikeyhtälö kulmalle θ käyttäen ELY:ä.

(c) Mikä on heilurin pienten värähtelyjen ($|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ ja $\cos\theta \approx 1$) taajuus?

Ratkaisu:

(a)-kohdassa kirjoitetaan heilurin liike-energia hitausmomentin I avulla. Potentiaalienergia saadaan tavalliseen tapaan. Näistä saadaan L, jota (b)-kohdassa derivoimalla ja ELY:ä soveltamalla saadaan liikeyhtälön koordinaatin θ suhteen. (c)-kohdassa käytetään pienen kulman approksimaatioita, jonka jälkeen "pakotetaan" liikeyhtälö harmonisen värähtelijän yhtälöön, jolloin kulmataajuus nähdään yhtälön kertoimena.

(a) Taulukoista löytyy, että päästään pyörivän sauvan hitausmomentti on

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2,$$

joten heilurin kineettinen energia on

$$T = T(\dot{\theta}; t) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Oletetaan, että jousi on massaton eli sillä ei ole kineettistä energiaa, ainoastaan potentiaalienergiaa. Heilurin massa on jakautunut tasaisesti, joten potentiaalienergia saadaan laskettua käyttämällä massakeskipistettä, joka on pituudella $\ell/2$. Koko systeemin potentiaalienergiaksi tulee siis

$$U = U(\theta; t) = mgh + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta.$$

Lagrangianiksi saadaan siten

$$L = L(\theta, \dot{\theta}; t) = T - U = \frac{1}{2}\ell\left(\frac{1}{3}m\ell\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos\theta) - k\ell\sin^2\theta\right).$$

(b) Lagrangiania derivoimalla

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\ell\sin\theta\left(\frac{1}{2}mg + k\ell\cos\theta\right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}.$$

ELY:n avulla liikeyhtälöksi saadaan siten

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -\ell\sin\theta\left(\frac{1}{2}mg + k\ell\cos\theta\right).$$

(c) Kun $|\theta| \ll 1$, saadaan pienen kulman approksimaatiolla (eli Taylorin sarjakehitelmällä) $\sin\theta \cong \theta$ ja $\cos\theta \cong 1$. Sijoittamalla nämä liikeyhtälöön saadaan

$$\frac{1}{3}m\ell\ddot{\theta} = -\theta\left(\frac{1}{2}mg + k\ell\right).$$

Järjestellään termejä uudelleen, jolloin

$$\ddot{\theta} + 3\left(\frac{\frac{1}{2}mg + k\ell}{m\ell}\right)\theta = 0.$$

Kun asetetaan

$$\omega^2 = 3\left(\frac{\frac{1}{2}mg + k\ell}{m\ell}\right),$$

niin liikeyhtälöksi saadaan tuttu harmonisen värähtelijän liikeyhtälö

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

Pienten värähtelyjen taajuus on siis

$$\omega = \sqrt{3\left(\frac{\frac{1}{2}mg + k\ell}{m\ell}\right)} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}}.$$

Tulos on järkevä, sillä ilman jousta ($k = 0$) taajuus olisi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}},$$

mikä on peruskursseiltakin tutun fysikaalisen heilurin kulmataajuus.

Tehtävä 3

Kuvan mukaisessa järjestelmässä on massaton suora, kiinteä tanko, jota pitkin kappaleet 1 ja 2 (massat m_1 ja m_2) pääsevät liukumaan kitkatta. Tanko pääsee pyörimään kuvan tasoa vastaan kohtisuoran akselin ympäri, mitä kuvaa kulma θ. Voit jatkossa olettaa kappaleiden pysyvän vastakkaisilla puolilla pyörimisakselia. Kappaleet on yhdistetty toisiinsa jousella, jonka lepopituus on ℓ ja jousivakio k. Painovoima olkoon nolla.

(a) Kirjoita järjestelmän Lagrangen funktio $L(r_1, r_2, \theta, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\theta})$.

(b) Käytä ELY:ä ja johda liikeyhtälöt muuttujille r_1, r_2 ja θ.

(c) Eräässä tilanteessa tangon havaitaan pyörivän vakiokulmanopeudella $\dot{\theta}$ siten, että myös r_1 ja r_2 pysyvät vakioina. Selvitä liikeyhtälöstä seuraavat asiat: Mikä tällöin on suhde r_1/r_2 ja mikä on kulmanopeus $\dot{\theta}$?

Ratkaisu:

(a)-kohdassa liike-energia koostuu molempien kappaleiden kohdalla sekä pyörimisestä että translaatioliikkeestä. (b)-kohdassa derivoidaan Lagrangen funktiota ja kirjoitetaan ELY:n avulla liikeyhtälöt. (c)-kohdassa katsotaan, miten annetut ehdot yksinkertaistavat liikeyhtälöitä ja ratkaistaan näistä sitten halutut suureet.

(a) Kun oletetaan, että myös jousi on massaton, systeemin liike-energia koostuu kahden massan translaatio- ja rotaatioenergioista siten, että

$$T = T(r_1, r_2, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\theta}; t) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}_{\text{rotaatio}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2}_{\text{1. translaatio}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2}_{\text{2. translaatio}} .$$

Potentiaalienergiaa tulee painovoiman ollessa nolla vain jousesta, jolloin

$$U = U(r_1, r_2; t) = \frac{1}{2}k(r_1 + r_2 - \ell).$$

Siispä Lagrangianiksi saadaan

$$L = L(r_1, r_2, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\theta}; t) = T - U = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) + \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - \frac{1}{2}k(r_1 + r_2 + \ell).$$

(b) Derivaatoiksi tulee koordinaateille r_1, r_2 ja θ seuraavat:

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = m_1 r_1 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = m_1\dot{r}_1 \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = m_1\ddot{r}_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = m_2 r_2 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = m_2\dot{r}_2 \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = m_2\ddot{r}_2$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta}(m_1 r_1 \dot{r}_1 + m_2 r_2 \dot{r}_2) + \ddot{\theta}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2).$$

Näistä saadaan ELY:n avulla liikeyhtälöt

$$\begin{cases} m_1 r_1 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell) = m_1 \ddot{r}_1 \\ m_2 r_2 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell) = m_2 \ddot{r}_2 \\ 2\dot{\theta}(m_1 r_1 \dot{r}_1 + m_2 r_2 \dot{r}_2) + \ddot{\theta}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = 0 \end{cases}.$$

(c) Kun $\dot{\theta}$ on vakio, niin $\ddot{\theta} = 0$. Vastaavasti kun r_1 ja r_2 ovat vakioita, $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = 0$. Siispä liikeyhtälöt redusoituvat yhtälöpariksi, sillä liikeyhtälö koordinaatille θ on tässä tilanteessa identtisesti tosi:

$$\begin{cases} m_1 r_1 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell) = 0 \\ m_2 r_2 \dot{\theta}^2 - k(r_1 + r_2 - \ell) = 0 \end{cases}.$$

Yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$m_1 r_1 \dot{\theta}^2 = m_2 r_2 \dot{\theta}^2,$$

josta voidaan ratkaista pituuksien suhde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Toisaalta kulmanopeudeksi tulee

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k(r_1 + r_2 - \ell)}{m_1 r_1}} = \sqrt{\frac{k(r_1 + r_2 - \ell)}{m_2 r_2}}.$$

Tehtävä 4

Kappale, jonka massa on M, liukuu kitkatta vaakasuoraa kiskoa pitkin. Kappaleesta on ripustettu heiluri, jonka massa on m. Heilurin hetkellinen heilahduskulma olkoon θ ja kappaleen hetkellinen sijainti olkoon x. Kaikki liike tapahtuu samassa tasossa. Muodosta systeemin liike-energian ja potentiaalienergian lausekkeet sekä Lagrangen funktio $L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$. Johda ELY:ä käyttäen liikeyhtälöt x:lle ja θ:lle (niitä ei tarvitse ratkaista).

Ratkaisu:

Kirjoitetaan systeemin liike-energia kahden kappaleen liike-energioiden summana. Heilurin liike-energiassa tulee olla tarkkana siitä, miten nopeus jakautuu komponentteihin. Kirjoitetaan sitten Lagrangen funktio, derivoidaan sitä ja kirjoitetaan liikeyhtälöt ELY:n avulla.

Massan M liike-energia on yksinkertaisesti

$$T_M = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

Jaetaan sitten heilurin punnuksen nopeus komponentteihin. x-suunnassa nopeuteen vaikuttaa sekä heilurin ratanopeus että M-kappaleen translaationopeus $\dot{x}$. Nopeuskomponentiksi tulee siis

$$v_x = \dot{x} + b\dot{\theta}\cos\theta.$$

y-suunnassa nopeuteen vaikuttaa vain ratanopeus, joten

$$v_y = b\dot{\theta}\sin\theta.$$

Siispä heilurin punnuksen liike-energia on

$$T_m = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2} m\left((\dot{x} + b\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (b\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}b\dot{\theta}\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2\right).$$

Systeemin liike-energia on siten $T = T_M + T_m$. Kun valitaan potentiaalienergian nollataso niin, että M-kappaleen gravitaatiopotentiaalienergia on nolla, saadaan heilurin massan potentiaalienergiaksi

$$U = -mgb\cos\theta.$$

Siispä Lagrangianiksi tulee

$$L = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}b\dot{\theta}\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2\right) + mgb\cos\theta.$$

Derivaatoiksi tulee

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + b\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mb(g + \dot{x}\dot{\theta})\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb(b\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta) \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} mb(b\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta).$$

ELY:n avulla liikeyhtälöiksi saadaan

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ -mb(g+\dot{x}\dot{\theta})\sin\theta = mb(b\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases} .$$

Yhtälöt sievenevät lopulta muotoon

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ b\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases} .$$

Tehtävä 5

Heilurin varsi on jousi, jonka tasapainopituus on b ja jousivakio on k. Jousen päässä on punnus, jonka massa on m. Heilurin varren hetkellinen pituus on $\ell(t)$ ja jousi on taipumaton. Kulmamuuttuja on $\theta(t)$. Muodosta Lagrangen funktio $L(\ell, \theta, \dot{\ell}, \dot{\theta})$. Johda ELY:istä liikeyhtälöt θ:lle ja ℓ:lle.

Ratkaisu:

Kuten Tehtävässä 3, liike-energia koostuu sekä translaatio- että rotaatioenergiasta. Potentiaalienergiaan vaikuttaa sekä painovoima että jousen potentiaalienergia. Näiden avulla kirjoitetaan Lagrangen funktio, derivoidaan sitä ja kirjoitetaan liikeyhtälöt ELY:n avulla.

Liike-energia koostuu translaatio- ja rotaatioenergioista. Punnuksen hetkellinen ratanopeus on $v = v(t) = \ell(t)\dot{\theta} = \ell\dot{\theta}$, joten sen liike-energiaksi tulee on

$$T = T(\ell, \theta; t) = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2).$$

Kun oletetaan, että jousi on massaton, niin koko systeemin liike-energia on tällöin pelkän punnuksen liike-energia. Punnuksen gravitaatiopotentiaalienergia on tilanteen geometrian nojalla $U = mgh = mg\ell\cos\theta$, kun potentiaalienergian nollatasoksi valitaan $U(\theta = \pi/2) = 0$. Jousen potentiaalienergiaksi tulee lepopituus b huomioiden $U = \frac{1}{2}k(\ell - b)^2$. Koko systeemin potentiaalienergiaksi tulee siten

$$U = U(\ell, \theta; t) = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - b)^2.$$

Lagrangen funktioksi tulee siten

$$L = L(\ell, \theta, \dot{\ell}, \dot{\theta}; t) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2) + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}k(\ell - b)^2.$$

Osittaisderivaatioiksi tulee nyt

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}.$$

Tällä kertaa $\ell = \ell(t)$, joten tulon derivointikaavalla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2m\ell\dot{\ell}\dot{\theta} + m\ell^2\ddot{\theta}.$$

Vastaavasti

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = k(b - \ell) + m\ell^2\dot{\theta} + mg\cos\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m\dot{\ell} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m\ddot{\ell}.$$

Funktion $\ell(t)$ liikeyhtälöksi tulee ELY:n avulla

$$-mg\ell\sin\theta = 2m\ell\dot{\ell}\dot{\theta} + m\ell^2\ddot{\theta}$$

ja funktion $\theta(t)$ liikeyhtälöksi saadaan

$$k(b-\ell)+m\ell^2\dot{\theta}+mg\cos\theta=m\ddot{\ell}.$$

Sieventämällä molempia yhtälöitä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{2\dot{\ell}}{\ell}\dot{\theta}+\dfrac{g\sin\theta}{\ell}=0,\\ \ddot{\ell}-\ell^2\dot{\theta}+\dfrac{k(\ell-b)}{m}-g\cos\theta=0.\end{cases}$$

Tehtävä 6

Kappale, jonka massa on m, liukuu kitkatta kaltevalla tasolla, jonka kallistuskulma θ on vakio. Kalteva taso on (katso kuva) kiilamainen kappale, jonka massa on M. Se liukuu kitkatta vaakasuoralla alustalla. Käytä kuvan muuttujia x ja r, muodosta niille ELY:t ja liikeyhtälöt. Ratkaise massan M kiihtyvyys.

Ratkaisu:

Vastaavasti kuin Tehtävässä 4, m-massaisen kappaleen nopeus riippuu sekä kappaleen omasta nopeudesta että myös kiilan nopeudesta, joten nopeus täytyy jakaa huolellisesti komponentteihin. Potentiaalienergia saadaan helposti trigonometrian avulla. Kirjoitetaan näiden avulla Lagrangen funktio, derivoidaan ja kirjoitetaan liikeyhtälöt ELY:n avulla. Saadusta yhtälöparista voidaan ratkaista $\ddot{x}$ eli massan M kiihtyvyys.

Kiilan liike-energiaksi tulee suoraan

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2.$$

Jaetaan sitten m-kappeleen nopeus komponentteihin. x-suunnassa nopeuteen vaikuttaa sekä kiilan nopeus $\dot{x}$ että kappaleen itsensä nopeus $\dot{r}$, jonka x-komponentti on $\dot{r}\cos\theta$. Siispä

$$v_x = \dot{x} + \dot{r}\cos\theta.$$

y-suunnassa nopeuteen vaikuttaa vain kappaleen itsensä nopeuden $\dot{r}$ y-suuntainen komponentti eli $v_y = \dot{r}\sin\theta$. Siispä m-kappaleen liike-energiaksi tulee

$$T_m = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m\left((\dot{x} + \dot{r}\cos\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta)^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{r}^2 + 2\dot{x}\dot{r}\cos\theta).$$

Systeemin kokonaisliike-energia on siten $T = T_M + T_m$. Kun valitaan potentiaalienergian nollataso niin, että kiilan gravitaatiopotentiaali on nolla, jolloin m-kappaleen, ja siten koko systeemin, potentiaalienergia on

$$U = mgr\sin\theta.$$

Lagrangianiksi tulee siten

$$L = L(\dot{x}, r, \dot{r}; t) = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{r}^2 + 2\dot{x}\dot{r}\cos\theta) - mgr\sin\theta.$$

Derivaatoiksi saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{r}\cos\theta \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{r}\cos\theta$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -mg\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\dot{r} + \dot{x}\cos\theta) \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\ddot{r} + \ddot{x}\cos\theta).$$

ELY:n avulla liikeyhtälöiksi tulee

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ddot{r}\cos\theta = 0 \\ m(\ddot{r} + \ddot{x}\cos\theta) = -mg\sin\theta \end{cases} .$$

Sieventämällä saadaan

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ddot{r}\cos\theta = 0 \\ \ddot{r} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases} ,$$

josta ratkaisemalla $\ddot{x}$ saadaan M-kappaleen kiihtyyvys:

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m - m\cos^2\theta}.$$