Tehtävä 1

Pieneen m-massaiseen palloon on porattu reikä. Pallo liukuu kitkatta pitkin R-säteisen ympyrän muotoon taivutettua paikallaan pysyvää rautalankaa (rautalanka pallon rei'än läpi). Pallon sijainnin kertovat koordinaatit $x(t)$ ja $y(t)$ siten, että $x^2 + y^2 = R^2$ (katso kuva). Nyt y-koordinaatti on vertikaalinen ja x-koordinaatti horisontaalinen. Palloon vaikuttaa painovoima $-mg\hat{e}_y$.

(a) Kirjoita ensin karteesisia koordinaatteja $x(t)$ ja $y(t)$ käyttäen Lagrangen funktio $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Kirjoita sitten napakoordinaattien kulmamuuttujaa $\varphi(t)$ käyttäen Lagrangen funktio $L(\varphi, \dot{\varphi})$.

(b) Muodosta tavallinen ELY muuttujalle φ ja johda liikeyhtälö muuttujalle φ.

(c) Muodosta ELY muuttujille x ja y sisällyttäen sidosehtoa vastaava yleistetty voima (Q_x, Q_y). Osoita, että liikeradan alimmassa kohdassa (vastaa kulman arvoa $\varphi = 3\pi/2$) on $Q_x = 0$ ja $Q_y = mR\dot{\varphi}^2 + mg$.

(d) Mikä on c-kohdan tuloksen eli Q_y:n lausekkeen termien fysikaalinen tulkinta?

Ratkaisu:

(a)-kohdassa Lagrangen funktio tulee suoraviivaisesti karteesisissa koordinaateissa. Napakoordinaateissa tarvitaan ratanopeus $v = R\dot{\varphi}$ ja potentiaalienergia saadaan trigonometrian avulla. (b)-kohdassa sovelletaan ELY:ä (a)-kohdan Lagrangianiin napakoordinaateissa. (c)-kohdassa johdetaan ELY:n avulla liikeyhtälö karteesisiin koordinaatteihin. Sidosehto on $x^2+y^2 = R^2$, jonka voi ilmaista muodossa $f(x, y) = 0$ käyttäen neliöjuurta. Ratkaistaan liikeyhtälöstä Q_x ja Q_y, jotka sievenevät haluttuihin muotoihin kyseisessä pisteessä. (d)-kohdassa pohditaan, mitä (c)-kohdassa tulikaan tehtyä.

(a) Karteesisessa koordinaatistossa liike-energia tulee suoraviivaisesti Pythagoraan lauseella

$$T = T(\dot{x}, \dot{y}; t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Potentiaalienergiaksi tulee puolestaan

$$U = U(y; t) = mgy,$$

kun nollatasoksi valitaan $y = 0$. Siispä Lagrangen funktio on karteesisissa koordinaateissa

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

Napakoordinaatistossa ratanopeus saadaan vakioetäisyydellä $v = R\dot{\varphi}$, joten liike-energiaksi tulee

$$T = T(\dot{\varphi}; t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentiaalienergia saadaan trigonometrian avulla

$$U = U(\varphi; t) = mgh = mg\sin\varphi.$$

Näin ollen Lagrangen funktioksi tulee napakoordinaateissa

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}; t) = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - mg\sin\varphi.$$

(b) Tarkastellaan (a)-kohdan Lagrangen funktiota napakoordinaateissa. Derivaatoiksi saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR\cos\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\ddot{\varphi},$$

joten ELY:n avulla liikeyhtälöksi tulee

$$mR^2\ddot{\varphi} = -mgR\cos\varphi,$$

joka sievenee muotoon

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\cos\varphi = 0.$$

(c) Tarkastellaan (a)-kohdan Lagrangen funktiota karteesisissa koordinaateissa. Merkitään sidosehtoa $f(x, y) = y - G(x)$, missä

$$G(x) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2}, & y \geq 0 \\ -\sqrt{R^2 - x^2}, & y < 0 \end{cases}.$$

Tällöin $x^2 + y^2 = R^2 \iff f(x, y) = 0$. Derivoimalla Lagrangiania saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}.$$

Sidosehdot sisällyttäen ELY antaa liikeyhtälöiksi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ m\ddot{y} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} - mg \end{cases},$$

jotka sievenevät muotoon

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \lambda G'(x) = 0 \\ m\ddot{y} + mg - \lambda = 0 \end{cases} .$$

Funktion G derivaatta jätetään tässä vaiheessa laskematta, sillä juurifunktiosta johtuen sen derivaatasta tulee hieman sotkuinen. Sidosehdosta $f(x, y) = y - G(x) = 0$ saadaan, että $y = G(x)$. Derivoimalla tätä kahdesti saadaan

$$\ddot{y} = G'(x)\ddot{x} + G''(x)\dot{x}^2.$$

Sijoittamalla tämä alempaan liikeyhtälöön tulee

$$\lambda = m\ddot{y} + mg = m(G'(x)\ddot{x} + G''(x)\dot{x}^2 + g).$$

Kun tämä sijoitetaan ylempään liikeyhtälöön, saadaan

$$\ddot{x} + G'(x)(G'(x)\ddot{x} + G''(x)\dot{x}^2 + g) = \left(1 + G'(x)^2\right)\ddot{x} + G'(x)G''(x)\dot{x}^2 + gG'(x) = 0.$$

Kirjoitetaan sitten funktion G derivaatat auki, jolloin reilulla sieventämisellä

$$\begin{cases} R^2\left(\ddot{x} + \dfrac{x\dot{x}^2}{R^2 - x^2}\right) \mp gx\sqrt{R^2 - x^2} = 0 \\ \ddot{y} = \pm\dfrac{x^3\ddot{x} - R^2(x\ddot{x} + \dot{x}^2)}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \end{cases} ,$$

missä merkki määräytyy y-koordinaatin merkistä ($y > 0 \implies +$). Nyt

$$Q_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda G'(x) = mG'(x)(G'(x)\ddot{x} + G''(x)\dot{x}^2 + g),$$

joten liikeradan alimassa kohdassa ($x = 0$ ja $y = -R$) pätee

$$Q_x = 0,$$

sillä $G'(0) = \left[\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]_{x=0} = 0$. Vastaavasti

$$Q_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = m(G'(x)\ddot{x} + G''(x)\dot{x}^2 + g),$$

jolloin liikeradan alimmassa kohdassa

$$Q_y = mG''(x)\dot{x}^2 + mg = \frac{m\dot{x}^2}{R} + mg,$$

sillä $G'(0) = 0$ ja $G''(0) = 1/R$ kun $y = -R < 0$. Toisaalta alimmassa kohdassa ratanopeus v ja $\dot{x}$ ovat yhdensuuntaiset, joten $\dot{x}^2 = v^2 = R^2\dot{\varphi}^2$ eli

$$Q_y = mR\dot{\varphi}^2 + mg.$$

(d) (c)-kohdassa saatiin siis, että

$$Q_x = 0$$

ja

$$Q_y = mR\dot{\varphi}^2 + mg.$$

Nämä kuvaavat yleistettyjä voimia. $Q_x = 0$ tarkoittaa, että kyseisellä hetkellä x-suuntaan ei kohdistu mitään voimia ja momentteja. $Q_y = mR\dot{\varphi}^2 + mg$ ensimmäinen termi $mR\dot{\varphi}^2$ kuvaa sitä voimaa, mikä pitää kappaleen liikkeen ympyräradalla. Kyseessä on peruskursseilta tuttu ympyräliikkeeseen pätevä kaava

$$F = ma = \frac{mv^2}{R} = mR\omega^2,$$

missä nyt siis $\omega = \dot{\varphi}$. Toinen termi mg kuvaa gravitaatiovoimaa, joka luonnollisesti kohdistuu hiukkaseen vain y-suunnassa.

Lienee sanomattakin selvää, että liikeyhtälöiden johtaminen on huomattavasti helpompaa napakoordinaateissa. Karteesisissa koordinaateissa sidosehdon lisäksi juurifunktiot aiheuttavat sotkua. Veikkaisin, että on jokin siistimpi tapa käsitellä sidosehtoa, johon ei tarvitsisi käyttää neliöjuuria, mutta pitäisi se näinkin toimia.

Tehtävä 2

Erään järjestelmän (pallo vierii sylinterin sisäpinnalla) Lagrangen funktio on kirjoitettavissa muotoon

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}mr^2\dot{\phi}^2 + mgR\cos\theta$$

missä m, r, R ovat positiivisia vakioita. Koordinaateille θ ja ϕ pätee sidosehto $R\theta = r\phi$.

(a) Käytä sidosehtoa suoraan muuttujien lukumäärän vähentämiseen siten, että $L = L(\theta, \dot{\theta})$. Käyttäen ELY:ä johda liikeyhtälö. Osoita, että pienten värähtelyjen kulmataajuus on $\omega = \sqrt{5g/7R}$.

(b) Kirjoita ELY:t muuttujille θ ja ϕ. Ota käyttöön sidosehtoa vastaava määräämätön Lagrangen kertoja λ. Johda liikeyhtälöt ja osoita, että pienille värähtelyille sidosvoimaan liittyy momentti $Q = R\lambda = \frac{2}{7}mgR\theta$.

Ratkaisu:

(a)-kohdassa käytetään sidosehtoa, jota derivoimalla saadaan $r\dot{\phi} = R\dot{\theta}$. Kun tämän sijoittaa Lagrangen funktioon, se riippuu vain muuttujista θ ja $\dot{\theta}$. Kirjoitetaan liikeyhtälö ELY:n avulla ja pakotetaan se harmonisen värähtelijän liikeyhtälöksi, jolloin taajuus voidaan lukea suoraan yhtälöstä. (b)-kohdassa asetetaan sidosehdoksi $R\theta - r\phi = 0$. Kirjoitetaan sidosehdolliset liikeyhtälöt molemmissa koordinaateissa, ja ratkaistaan λ. Yleistetty voima saadaan määritelmästä, kunhan käytetään pienen kulman approksimaatiota.

(a) Koska $r\phi = R\theta$, niin $r\dot{\phi} = R\dot{\theta}$. Sijoittamalla tämä Lagrangen funktioon saadaan

$$L = L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = \frac{7}{10}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta.$$

Derivoimalla

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5}mR^2\dot{\theta} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5}mR^2\ddot{\theta}.$$

ELY:n avulla liikeyhtälöiksi tulee siten

$$\frac{7}{5}mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta,$$

josta saadaan sieventämällä

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7R}\sin\theta = 0.$$

Pienillä värähtelyillä saadaan pienen kulman approksimaation avulla $\sin\theta \cong \theta$, jolloin

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7R}\theta = 0.$$

Kun asetetaan

$$\omega^2 = \frac{5g}{7R},$$

saadaan tuttu harmonisen värähtelijän liikeyhtälö

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

Tästä seuraa, että pienten värähtelyjen taajuus on

$$\omega = \sqrt{5g/7R}.$$

(b) Määritellään sidosehtoa varten funktio $f(\theta, \phi) = R\theta - r\phi$, jolloin sidosehto toteutuu jos ja vain jos $f(\theta, \phi) = 0$. Selvästi

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = R \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = -r.$$

Tehtävänannossa annettua Lagrangen funktiota derivoimalla saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta}$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{2}{5}mr^2\dot{\phi} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\phi}.$$

ELY:n avulla liikeyhtälöiksi tulee siten

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = \lambda - mg\sin\theta \\ \frac{2}{5}mr^2\ddot{\phi} = -\lambda r \end{cases},$$

joka sievenee muotoon

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = \lambda - mg\sin\theta \\ \frac{2}{5}mr\ddot{\phi} = -\lambda \end{cases}.$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan sidosehdon avulla, että

$$\lambda = -\frac{2}{5}mr\ddot{\phi} = -\frac{2}{5}mR\ddot{\theta}.$$

Sijoittamalla tämä ylempään liikeyhtälöön ja sieventämällä tulosta saadaan

$$\frac{7}{5}R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

eli

$$R\ddot{\theta} = -\frac{5}{7}g\sin\theta.$$

Nyt siis

$$\lambda = -\frac{2}{5}mR\ddot{\theta} = \frac{2}{7}mg\sin\theta.$$

Käyttämällä jälleen sidosehtoa ja yllä olevaa saadaan

$$\frac{2}{5}mr\ddot{\phi} + \lambda = \frac{2}{5}mr\ddot{\phi} + \frac{2}{7}mg\sin\left(\frac{r\phi}{R}\right) = 0$$

eli

$$7r\ddot{\phi} + 5g\sin\left(\frac{r\phi}{R}\right) = 0.$$

Lopulliset liikeyhtälöt ovat siten

$$\begin{cases} 7R\ddot{\theta} + 5g\sin\theta = 0 \\ 7r\ddot{\phi} + 5g\sin\left(\frac{r\phi}{R}\right) = 0 \end{cases}.$$

Yleistetyksi voimaksi tulee nyt

$$Q = \frac{\partial f}{\partial \theta}\lambda = R\lambda = \frac{2}{7}mgR\sin\theta.$$

Pienillä kulmilla $\sin\theta \cong \theta$, joten

$$Q \cong \frac{2}{7}mgR\theta.$$

Tehtävä 3

Hiukkanen, jonka massa on m, liukuu kitkatta pitkin kuvan mukaisen kappaleen, jonka massa on M, sylinterinmuotoista pintaa. Tämän seurauksena kappale liukuu vakaasuoralla pöytäpinnalla (kitkattomasti).

(a) Muodosta ELY (perusversio ilman sidosehtoja) ja johda liikeyhtälöt.

(b) Laske kappaleen reaktio eli koordinaattiin x liittyvä voima kulmamuuttujan θ funktiona (tämän voi tehdä ainakin kahdella tavalla).

Ratkaisu:

(a)-kohdassa kirjoitetaan molempien kappaleiden paikkakoordinaatit tarkasti karteesisissa koordinaateissa, jolloin liike-energia saadaan näitä derivoimalla. Potentiaalienergia tulee suoraan geometriasta, joten kirjoitetaan näiden avulla Lagrangen funktio ja johdetaan liikeyhtälöt ELY:n avulla. (b)-kohdassa johdetaan aluksi liikeyhtälö muuttujan r suhteen sidosehdolla $r = R$. r pidetään muuttujana, jotta liikeyhtälö voidaan ylipäätään johtaa. ELY:n johtamisen jälkeen voidaan asettaa r takaisin vakioksi. Tämän jälkeen ratkaistaan λ ja kirjoitetaan se pelkästään θ:n ja θ_0:n (alkuehdon) avulla. Kun Q_r on laskettu, $Q_x = Q_r \cos\theta$.

(a) Merkitään kiilan sijaintia karteesisessa koordinaatistossa siten, että

$$x_M = x, \quad y_M = 0$$

ja vastaavasti m-kappaleen sijaintia

$$x_m = x + r\cos\theta, \quad y_m = -r\sin\theta.$$

Sijaintien lausekkeet tulee suoraan tilanteen geometriasta. Systeemin kineettinen energia koostuu molempien kappaleiden liike-energioista, jolloin

$$\begin{aligned} T = T(\dot{x}, \dot{y}; t) &= \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x} + \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta\right)^2 + \left(-\dot{r}\sin\theta - \dot{\theta}r\cos\theta\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{r}\cos\theta - 2\dot{x}r\dot{\theta}\sin\theta\right). \end{aligned}$$

Potentiaalienergia on yksinkertaisesti

$$U = -mgr\sin\theta,$$

kun nollataso valitaan siten, että kiilan potentiaalienergia on nolla. Lagrangianiksi saadaan siten

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{r}\cos\theta - 2\dot{x}r\dot{\theta}\sin\theta\right) + mgr\sin\theta. \qquad (1)$$

Tässä tilanteessa kuitenkin vaaditaan sidosehtona, että $r = R \in \mathbb{R}$, joten $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, jolloin Lagrangian yksinkertaistuu muotoon

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta\right) + mgR\sin\theta. \qquad (2)$$

Käyttämällä Lagrangianin muotoa (2) saadaan derivoimalla

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} - mR\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} - mR\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

sekä

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR\cos\theta\left(g - \dot{x}\dot{\theta}\right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR\left(R\dot{\theta} - \dot{x}\sin\theta\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR\left(R\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right).$$

ELY:n avulla näistä saadaan liikeyhtälöiksi

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mR\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = 0 \\ mR\cos\theta\left(g - \dot{x}\dot{\theta}\right) = mR\left(R\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases},$$

jotka sievenevät muotoon

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = 0 & (3a) \\ R\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta - g\cos\theta = 0 & (3b) \end{cases}$$

kun merkitään $\mu = m/(M+m)$.

(b) Kirjoitetaan ELY muuttujan r suhteen käyttäen sidosehtoa $f(r) = r - R = 0$. Lagrangen funktion muotoa (1) derivoimalla

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mg\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + m\dot{x}\cos\theta \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} + m\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right).$$

Sidosehto huomioimalla ELY:ksi tulee

$$m\ddot{r} + m\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) = mr\dot{\theta}^2 - m\dot{x}\sin\theta + mg\sin\theta + \lambda\overbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}^{=1},$$

josta voidaan ratkaista λ huomioimalla, että $r = R$ ja $\dot{r} = \ddot{r} = 0$:

$$\lambda = m\ddot{x}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta. \tag{4}$$

Sijoitetaan sitten $\ddot{\theta}$ yhtälöstä (3a) yhtälöön (3b), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \mu R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\
&= \mu R\left[\left(\frac{\ddot{x}\sin\theta + g\cos\theta}{R}\right)\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right] \\
&= \mu\ddot{x}\sin^2\theta + \mu g\sin\theta\cos\theta + \mu R\dot{\theta}^2\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla $\ddot{x}$ edellisestä saadaan

$$\ddot{x} = \frac{\mu g\sin\theta\cos\theta + \mu R\dot{\theta}^2\cos\theta}{1 - \mu\sin^2\theta}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4) saadaan pitkällisen sievennyksen jälkeen

$$\lambda = \frac{m(\lambda - 1)}{1 - \lambda\sin^2\theta}\left(g\sin\theta + R\dot{\theta}^2\right). \tag{5}$$

Lasketaan sitten $\dot{x}$ yhtälöstä (3a) Analyysin peruslauseen avulla:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \int_0^t \ddot{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \mu R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mu R\dot{\theta}\sin\theta\right)\mathrm{d}t = \mu R\dot{\theta}\sin\theta.
\end{aligned}$$

Kokonaisenergia ajanhetkellä t on

$$E = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta\right) - mgR\sin\theta,$$

johon sijoittamalla edellä integroitu $\dot{x}$ tulee sieventämisen jälkeen

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left(1 - \mu\sin^2\theta\right) - mgR\sin\theta.$$

Energia säilyy, ja koska alussa kokonaisenergia on $E_0 = -mgR\sin\theta_0$, missä $\theta_0 = \theta(t = 0)$, niin saadaan, että

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(\sin\theta - \sin\theta_0)}{R\left(1 - \mu\sin^2\theta\right)}. \tag{6}$$

Nyt yleistetyn voiman määritelmästä

$$Q_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda,$$

joten sijoittamalla yhtälö (6) yhtälöön (5) saadaan sieventämällä

$$Q_r = \lambda = \frac{mMg\left(m\sin^2\theta - 3(M+m)\sin\theta + 2(M+m)\sin\theta_0\right)}{\left(M+m-m\sin^2\theta\right)^2}.$$

Kuitenkin Q_r on yleistetty voima muuttujan r suhteen. Q_r kuvaa sitä voimaa, minkä koko kiila kohdistaa hiukkaseen. Yleistettyyn voimaan Q_r sisältyy siis sekä x-suuntaisen liikkeen aiheuttama tukivoima, sekä kiilan kaarevuuden aiheuttama tukivoima y-suunnassa. Tehtävässä kysyttiin kuitenkin vain yleistettyä voimaa x-suunnassa, joten

$$Q_x = Q_r\cos\theta = \frac{mMg\cos\theta\left(m\sin^2\theta - 3(M+m)\sin\theta + 2(M+m)\sin\theta_0\right)}{\left(M+m-m\sin^2\theta\right)^2}.$$

Tehtävä 4

Asetetaan tikkaat, joiden massa on m ja pituus ℓ, nojaamaan seinään ja lattiaan oheisen kuvan mukaisesti. Oleta massan olevan jakautunut tasaisesti tikkaan pituussuunnassa ja kitka tikkaiden kummassakin päässä nollaksi. Tikkaat alkavat kaatua niiden päiden pysyessä kiinni seinässä ja lattiassa. Kallistuskulma olkoon alussa $\theta(t=0)=\theta_0$.

(a) Kirjoita Lagrangen funktio $L(\theta, \dot{\theta})$.

(b) Osoita ELY:ä käyttäen, että $\dot{\theta} = -\sqrt{3g(\sin\theta_0 - \sin\theta)/\ell}$ niin kauan kun tikkaiden päät pysyvät kiinni seinässä ja lattiassa.

(c) Pysyykö tikkaiden yläpää kiinni seinässä liikkeen loppuun saakka?

(d) Mietittäväksi: Olisikohan mahdollista, että tikkaiden alapää irtoaa lattiasta jossain vaiheessa?

Ratkaisu:

Tilannetta on kätevä tarkastella massakeskipisteen suhteen, joka on nyt tikkaiden puolivälissä. (a)-kohdassa liike-energiaa tulee sekä tikkaiden pyörimisestä massakeskipisteen suhteen sekä massakeskipisteen translaatiosta. (b)-kohdassa käytetään energian säilymistä, jonka avulla saadaan ratkaistua $\dot{\theta}^2$ ja siitä $\dot{\theta}$ huomioimalla neliöjuuren merkki. (c)-kohdassa kirjoitetaan liikeyhtälö koordinaatille θ ELY:n avulla. Tämän jälkeen kirjoitetaan Newtonin 2. lain avulla x-suuntainen voima käyttäen edellä johdettua liikeyhtälöä. Tikkaat irtoavat, kun voima menee nollaan, josta saadaan ratkaistua irtoamiskulma.

(a) Massa on tasaisesti jakautunut, jolloin tikkaiden massakeskipiste on puolivälissä. Keskipiste liikkuu nopeudella

$$\dot{x} = \left(\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\ell^2\dot{\theta}^2$$

ja hitausmomentti saman pisteen kautta on $I = \frac{1}{12}m\ell^2$. Liike-energiaksi tulee siten

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Potentiaalienergia tulee massakeskipisteen potentiaalienergiasta, eli

$$U = mgh = \frac{1}{2}mg\ell\sin\theta.$$

Siispä Lagrangianiksi tulee

$$L = T - U = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

(b) Alussa $t = 0$ ei ole kineettistä energiaa, joten

$$E_0 = U_0 = \frac{1}{2} mg\ell \sin\theta_0.$$

Ajanhetkellä t systeemin kokonaisenergia on

$$E = T + U = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mg\ell \sin\theta.$$

Kitkaa ei ole, joten energia säilyy eli $E_0 = E$. Tästä saadaan, että

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

Huomioimalla, että kun systeemi laitetaan liikkeelle levosta, tikkaat alkavat tulemaan alaspäin eli kulma pienenee. Siispä $\dot{\theta} \leq 0$ eli valitaan negatiivinen neliöjuuren haara. Siispä

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}.$$

(c) Derivoimalla Lagrangen funktiota saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} mg\ell \cos\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m\ell^2\dot{\theta} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\theta},$$

joten ELY:n avulla

$$\frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2} mg\ell \cos\theta.$$

Sieventämällä tulee

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2\ell}\cos\theta.$$

Kirjoitetaan sitten massakeskipisteen x-koordinaatti (lattian suuntainen) kulman avulla. Trigonometriasta

$$x = \frac{1}{2}\ell \cos\theta,$$

jota derivoimalla saadaan

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\ell \sin\theta\dot{\theta}$$

ja edelleen

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\ell(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2).$$

(b)-kohdasta saadaan $\dot{\theta}^2$, ja edellä laskettiin $\ddot{\theta}$. Sijoittamalla nämä saadaan

$$\ddot{x} = \frac{3g}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta - \sin\theta_0\right).$$

Newtonin 2. lain mukaan vaakasuuntainen voima on

$$F_x = m\ddot{x} = \frac{3mg}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta - \sin\theta_0\right).$$

Jos $F_x = 0$, niin yläpää irtoaa seinästä. Ratkaisemalla voiman nollakohta saadaan, että tikkaiden yläpää irtoaa kun

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right).$$

(d) Ei, sillä tällainen vaatisi, että tikkaiden toinen pää pystyisi menemään lattian läpi (pyörimismäärän säilyminen). Tämän voi nähdä myös laskemalla. Vastaavalla laskulla kuin (c)-kohdassa, asetetaan

$$y = \frac{1}{2}\ell\sin\theta,$$

jolloin

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}\ell(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2).$$

Sijoittamalla $\dot{\theta}^2$ ja $\ddot{\theta}$, saadaan Newtonin 2. laista, että

$$F_y = m\ddot{y} = -\frac{3}{4}mg(\cos^2\theta + 2\sin\theta(\sin\theta_0 - \sin\theta)).$$

Jos tutkitaan yhtälön $F_y = 0$ ratkaisua alkuarvoilla $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, huomataan, että

$$\theta([0,\pi/2]) = \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

sillä ratkaisufunktio $\theta(\theta_0)$ on vähenevä. Vaadittava kulma on siis suurempi kuin $\pi/2$, mitä ei voi tässä tilanteessa tapahtua.

Tässä tehtävässä (c)-kohta oli varmaankin tarkoitus tehdä sidosehtojen ja yleistetyn voiman avulla. En saanut sitä kuitenkaan toimimaan, joten käytin Newtonin 2. lakia.

Tehtävä 5

Helmi, jonka massa on m, liikkuu painovoiman $-mg\hat{e}_z$ vaikuttaessa kitkattomasti pitkin spiraalin muotoon taivutettua metallilankaa: sylinterikoordinaateissa (r, θ, z) ilmaisten $r^2 = x^2 + y^2 = \textsc{vakio}$ ja $z = k\theta$, missä $k = \textsc{vakio}$. Johda liikeyhtälöt Hamiltonin mekaniikasta.

Ratkaisu:

Käsitellään tilannetta karteesisissa koordinaateissa. Kirjoitetaan Lagrangen funktio, jolloin yleistetty liikemäärä voidaan laskea suoraan määritelmästä. Myös Hamiltonin funktio saadaan suoraan määritelmästä. Kirjoitetaan $\mathcal{H}$ siten, että saadaan näkyviin p_z, jolloin Hamiltonin derivointi helpottuu.

Kirjoitetaan helmen koordinaatit karteesisessa koordinaatistossa, jolloin

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad \text{ja} \quad z = z.$$

Liike-energiaksi tulee siten

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Potentiaalienergiaksi tulee suoraviivaisesti

$$U = mgz.$$

Lagrangianiksi saadaan siten

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

Koska helmi kulkee spiraalia pitkin, $r = \textsc{vakio}$ eli $\dot{r} = 0$ ja $z = k\theta$. Siispä

$$L = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2\dot{z}^2}{k^2} + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\left(\frac{1 + r^2}{k^2}\right) - mgz.$$

Nyt yleistetyksi liikemääräksi tulee

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\left(\frac{r^2}{k^2} + 1\right).$$

Hamiltonin funktioksi saadaan siten

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \dot{z}p_z - L \\
&= m\dot{z}^2\left(\frac{r^2}{k^2} + 1\right) - \frac{1}{2}m\dot{z}^2\left(\frac{r^2}{k^2} + 1\right) + mgz \\
&= \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m\left(\frac{r^2}{k^2} + 1\right)} + mgz.
\end{aligned}$$

Hamiltonin liikeyhtälöistä saadaan, että

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m\left(\frac{r^2}{k^2}+1\right)} = \dot{z}$$

ja

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -mg = \dot{p}_z.$$

Nämä yhdistämällä saadaan liikeyhtälö z-koordinaatille:

$$\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{\dot{p}_z}{m\left(\frac{r^2}{k^2}+1\right)} = -\frac{g}{\frac{r^2}{k^2}+1} = -\frac{gk^2}{r^2+k^2}.$$

Tehtävä 6

(Teoreettinen vaihtoehto)
Viriaaliteoreema on monikäyttöinen (esimerkiksi statistisessa mekaniikassa) eksakti tulos, joka koskee hiukkasjärjestelmän energian aikakeskiarvoja. Käy yksityiskohtaisesti läpi kurssikirjan luvussa 7.13 oleva viriaaliteoreeman johto (löytyy tämän tehtävän liitteenä). Sovella sitä sitten tilanteeseen, jossa hiukkaset ovat harmonisen värähtelijän potentiaalissa $U = \frac{1}{2}kr^2$ ja osoita, että $\langle T \rangle = \langle U \rangle$. Vertaa tehtävän 2:4(a) tulokseen.

Ratkaisu:

Johdetaan viriaaliteoreema käyttäen sopivaa funktiota S. Laskemalla sen aikaderivaatan aikakeskiarvo huomataan, että $\langle \dot{S} \rangle \to 0$. Tällöin odotusarvon sekä liikemäärän ominaisuuksilla saadaan viriaaliteoreema. Sovelletaan sitten viriaaliteoreemaa hiukkasjärjestelmää, jonka hiukkaset ovat harmonisessa potentiaalissa. Hiukkasten voima saadaan potentiaalienergian gradienttina, jolloin haluttu tulos saadaan suoralla viriaaliteoreeman sovelluksella.

Tarkastellaan n hiukkasen systeemiä, missä α:n hiukkasen sijainti $\mathbf{r}_\alpha$ ja liikemäärä $\mathbf{p}_\alpha$ ovat rajoitettuja. Määritellään funktio S siten, että

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha. \tag{7}$$

S:n aikaderivaataksi tulee yhtälön (7) ja tulon derivaatan avulla

$$\dot{S} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha + \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha. \tag{8}$$

Lasketaan sitten yhtälön (8) aikakeskiarvo jonkin aikavälin $\tau > 0$ yli Analyysin peruslauseen avulla:

$$\langle \dot{S} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{S} \, \mathrm{d}t = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau}. \tag{9}$$

Oletuksen nojalla S on rajoitettu, jolloin on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|S(\tau) - S(0)| \leq M,$$

joten yhtälöstä (9) seuraa, että

$$\lim_{\tau \to \infty} \langle \dot{S} \rangle = 0.$$

Siispä $\langle \dot{S} \rangle$ häviää hyvin pitkän ajan kuluessa. Tämä päättely pätee kaikkiin tilanteisiin, mutta käytännössä se on vain approksimaatio: raja-arvon määritelmä takaa, että $\langle \dot{S} \rangle$ voidaan viedä mielivaltaisen lähelle nollaa riittävän pitkän ajan kuluessa, mutta se ei takaa, että $\langle \dot{S} \rangle$ olisi koskaan tasan nolla. Jos kuitenkin systeemi on periodinen eli jollakin $T > 0$ pätee $S(T) - S(0) = 0$, voidaan valita τ siten, että $\tau = nT$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\langle \dot{S} \rangle = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} = 0,$$

mikä on eksakti tulos. Tämä vaatii kuitenkin, että systeemi on periodinen.

Oletetaan siis, että $\langle \dot{S} \rangle = 0$. Tällöin yhtälön (8) ja odotusarvon lineaarisuuden avulla saadaan, että

$$\langle \dot{S} \rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha \right\rangle + \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle = 0,$$

joten

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{p}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha \right\rangle = -\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle. \tag{10}$$

Huomataan, että $\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha = 2\left(\frac{1}{2} m v_\alpha^2\right) = 2T_\alpha$. Toisaalta Newtonin 2. lain mukaan $\dot{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha$, joten yhtälö (10) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} 2T_\alpha \right\rangle = 2\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} T_\alpha \right\rangle = -\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle. \tag{11}$$

Kineettinen energia on additiivista, joten

$$\sum_{\alpha=1}^{n} T_\alpha = T,$$

missä T on koko systeeminen kineettinen energia. Näin ollen yhtälö (11) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle \tag{12}$$

Yhtälöä (12) kutsutaan viriaaliteoreemaksi.

Tarkastellaan sitten n hiukkasen systeemiä, jossa hiukkaset ovat harmonisessa potentiaalissa $U_\alpha = \frac{1}{2} k r_\alpha^2$. Tällöin

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla U_\alpha.$$

Harmoninen potentiaali aiheuttaa keskeisvoiman, eli $\mathbf{r}_\alpha \parallel \mathbf{F}_\alpha$. Tämän avulla

$$\mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha = -\mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla U_\alpha = -r\frac{\mathrm{d}U_\alpha}{\mathrm{d}r_\alpha} = -r_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_\alpha}\left(\frac{1}{2} k r_\alpha^2\right) = -k r_\alpha^2 = 2U_\alpha.$$

Viriaaliteoreemasta saadaan nyt, että

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} 2U_\alpha \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \right\rangle.$$

Potentiaalienergia on additiivista, joten

$$\sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha = U,$$

missä U on koko systeemin potentiaalienergia. Siispä

$$\langle T \rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \right\rangle = \langle U \rangle.$$

Tehtävässä 2:4(a) osoitettiin, että yhden m-massaisen hiukkasen ollessa harmonisessa potentiaalissa pätee $\langle T \rangle = \langle U \rangle$. Nyt viriaaliteoreeman avulla saatiin osoitettua, että tulos yleistyy myös monen hiukkasen järjestelmiin.