Tehtävä 1

Osoita, että jos $\vec{g} = -GM\hat{e}_r/r^2$, niin $\vec{g} = -\nabla\phi$, missä $\phi = -GM/r$, kun $r > 0$ [pruju (5.3, 5.5, 5.6)]. Tässä $\hat{e}_r$ on M-massaisesta hiukkasesta pistettä (x, y, z) kohti suuntautuva yksikkövektori ja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ratkaisu:

Kirjoitetaan $\vec{g}$ auki karteesisissa koordinaateissa:

$$\vec{g} = -\frac{GM\hat{e}_r}{r^2} = -\frac{GM}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

Tällöin

$$\nabla \times \vec{g} = \vec{0},$$

jolloin vektorilaskennasta tiedetään, että $\vec{g}$ voidaan esittää jonkin potentiaalin ϕ gradienttina. Esimerkiksi integroimalla yhtälöryhmää

$$\vec{g} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

saadaan, että

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{GM}{r}.$$

Tästä saadaan, että

$$\vec{g} = -\nabla\phi, \quad \text{missä } \phi = -GM/r,$$

kuten haluttiinkin.

Tehtävä oli suoraviivainen laskutoimitus, jossa piti vain olla tarkkana etäisyyden r derivoinnissa.

Tehtävä 2

Hiukkanen pudotetaan tyhjiöputkeen, joka kulkee maanpinnalta maapallon keskipisteen kautta maapallon toiselle puolelle. Osoita ensin, että jos maapallon tiheys on vakio, niin hiukkasen liike on harmonista värähtelyä. Osoita, että tällaisen liikkeen jakso olisi noin 84 minuuttiia.

Ratkaisu:

Johdetaan hiukkasen liikeyhtälö Poissonin yhtälön $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ ja Newtonin 2. lain avulla, jolloin nähdään, että liikeyhtälö on harmonisen värähtelijän liikeyhtälö. Värähtelytaajuus voidaan lukea yhtälöstä, josta saadaan suoraviivaisesti jaksonaika.

Prujussa johdettiin Poissonin yhtälö

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

gravitaatiokentälle. Lasketaan tämän avulla gravitaatiopotentiaali Maan sisällä eli tarkastellaan homogeenista, vakiotiheydellä ρ olevaa R-säteistä palloa. Tilanne on pallosymmetrinen, joten pallokoordinaateissa ilmaistuna $\phi = \phi(r)$ eli gravitaatiopotentiaali riippuu vain etäisyydestä keskipisteeseen r. Tällöin

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho,$$

josta saadaan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho r^2.$$

Integroimalla puolittain tulee

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{4\pi G\rho}{3}r^3 + A$$

jollakin $A \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{4\pi G\rho}{3}r + \frac{A}{r^2},$$

jolloin jälleen integroimalla

$$\phi = \phi(r) = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{A}{r} + B,$$

missä $B \in \mathbb{R}$. Jotta ϕ olisi hyvin määritelty keskipisteessä, täytyy olla $A = 0$ (muuten ϕ divergoisi origossa). Siispä

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 + B.$$

B:n arvo tulisi reunaehdoista, mutta sen arvoa ei tässä tapauksessa tarvita. Nimittäin

$$\mathbf{F} = -m\nabla\phi = -m\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{4\pi mG\rho}{3}r\hat{\mathbf{r}}.$$

Newtonin 2. laista $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, joten radiaalikompontentille pätee

$$\ddot{r} + \frac{4\pi G\rho}{3}r = 0.$$

Kun asetetaan

$$\omega^2 = \frac{4\pi G\rho}{3},$$

liikeyhtälö saa tutun harmonisen värähtelijän $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$ muodon. Värähtelyn jaksonajaksi tulee nyt

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Lasketaan vielä jaksonajalle numeroarvo Maan tapauksessa. Maan tiheydeksi tulee

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3},$$

joten jaksonaika sievenee muotoon

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{mG}},$$

johon numeroarvot sijoittamalla saadaan haluttu tulos

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{(6371\,\mathrm{m})^3}{5.97\times 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot 6.674\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kgs}^2}} \approx 84.3\,\mathrm{min}.$$

Tehtävä 3

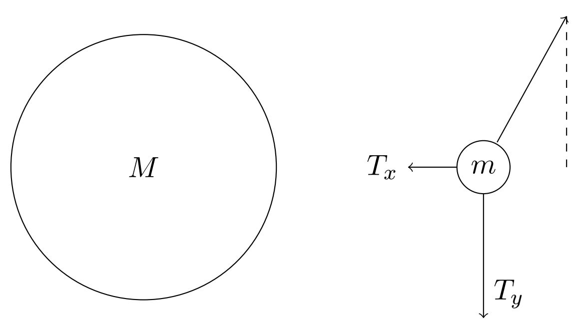
Erään varhaisista kokeista gravitaatiovakion G määrittämiseksi teki Nevil Maskelyne vuonna 1774. Kokeessa tutkittiin kartion muotoisen Schiehallion-vuoren vaikutusta mitattuun pystysuoraan suuntaan vuoren molemmilla puolilla ja mitattiin näiden suuntien ero. Koetta selitetään sivulla

`https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion_experiment`.

Tehdään tässä tehtävässä laskua toiseen suuntaan. Mallinna vuorta homogeenisella pallolla, jonka säde on 500 metriä ja tiheys $2.7 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Kuinka suuri on tällaisen 'vuoren' aiheuttama havaitun pystysuunnan poikkeama verrattuna tilanteeseen, jossa 'vuorta' ei ole? Karkea arvio riittää, vastaus kulman yksiköissä.

Ratkaisu:

Lasketaan vuoren gravitaation aiheuttama kulmapoikkeama heilurin pystysuoraan jakamalla heilurin lankaan kohdistuva jännitysvoima $\mathbf{T}$ komponentteihin. Näistä T_x aiheutuu vuoren massasta ja T_y heilurin ja Maan välisestä vetovoimasta.



Kuva 1: Vapaakappalekuva

Tarkastellaan Kuvan 1 mukaista tilannetta. Vuoren painovoiman aiheuttama heilurin kääntyminen θ (jota kuvassa on luonnollisesti liioiteltu reippaasti) saadaan suoraan trigonometriasta siten, että

$$\tan\theta = \frac{T_x}{T_y}.$$

T_y on Maan heilurin punnukseen m kohdistama painovoima, eli $T_y = -mg$ lähellä Maan pintaa. T_x puolestaan aiheutuu vuoren aiheuttamasta gravitaatiokentästä, joka Newtonin gravitaatiolain nojalla on

$$T_x = -G\frac{mM}{r^2},$$

missä r on vuoren ja heilurin massakeskipisteiden välinen etäisyys. Jos oletetaan, että heiluri on lähes kiinni vuoressa, niin $r = R$, missä R on vuoren säde. Tällöin

$$\tan\theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{GM}{gR^2} = \frac{4GR\rho}{3g}.$$

Lukuarvot sijoittamalla saadaan

$$\theta = \arctan\left(\frac{4 \cdot 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2} \cdot 500\,\mathrm{m} \cdot 2700\,\mathrm{kg/m^3}}{3 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}\right) \sim 10^{-5}\,\mathrm{rad}.$$

Tehtävä 4

Osoita, että tehokkain tapa kasvattaa elliptisellä radalla maan ympäri olevan raketin energiaa *lyhyellä* rakettimoottorin käytöllä on tehdä se raketin ollessa lähinnä maata ja työntövoiman ollessa raketin liikkeen suuntainen. Selitä ensin, mitä tarkoittaa 'tehokkain tapa'.

Ratkaisu:

Tarkastellaan rakettimoottorin lyhyen käytön tuottamaa "potkua" $\delta\mathbf{v}$. Tämä potku riippuu vain rakettimoottorin tehosta, joten tehokkain tapa tarkoittaa sellaista, joka annetulla $\delta\mathbf{v}$ muuttaa energiaa eniten. Lasketaan energian muutos ΔE ja maksimoidaan sitä kiinnitetyllä $\delta\mathbf{v}$.

Olkoon raketin massa m, etäisyys Maasta kyseisellä ajanhetkellä r ja ratanopeus $\mathbf{v}$. Lyhyen raketin käytön aikana tämä etäisyys pysyy lähes samana, joten potentiaalienergia ei Newtonin gravitaatiolain mukaan muutu. Riittää siis tarkastella liike-energian muutosta. Alussa

$$T_i = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2$$

ja lopussa

$$T_f = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2} m \left(\|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \|\delta\mathbf{v}\|^2 \right),$$

joten

$$\Delta E = \Delta T = T_f - T_i = \frac{1}{2} m \left(2\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \|\delta\mathbf{v}\|^2 \right).$$

Jotta raketin käyttö olisi mahdollisimman tehokasta, täytyy energian muutos ΔE maksimoitua. Pistetulon ominaisuuksien nojalla suure $2\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}$ saavuttaa maksiminsa silloin, kun $\mathbf{v} \parallel \delta\mathbf{v}$ eli kun työntövoima on liikkeen suuntainen. Tällöin suure

$$2\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = 2\|\mathbf{v}\|\|\delta\mathbf{v}\|$$

saavuttaa suurimman arvonsa annetulla $\delta\mathbf{v}$ kun $\|\mathbf{v}\|$ saavuttaa suurimman arvonsa. Nyt ratanopeudelle pätee

$$\|\mathbf{v}\| = r\dot{\theta}$$

ja koska tiedetään, että $\ell = \mu r^2 \dot{\theta}$ on liikevakio, saadaan, että

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\ell}{\mu r},$$

missä ℓ ja μ ovat vakioita. Siispä $\|\mathbf{v}\|$ maksimoituu, kun r minimoituu eli kun raketti on lähinnä Maata.

Tehtävä 5

Alla olevasta taulukosta puuttuu kolmen suureen numeroarvot c:llä merkityistä kohdista. Laske niiden arvot muiden tietojen perusteella. Tutustut samalla aurinkokunnan mittasuhteisiin.

Ratkaisu:

Kaikissa kolmessa kohdassa ratkaistaan Keplerin 3. laista haluttu suure ja lasketaan halutun suureen ja vastaavan Maan suureen suhde. Tämä siksi, että taulukossa kaikki arvot on ilmoitettu Maan vastaavien arvojen kertoimina (myös vuosi, sillä 1 vuosi vastaa Maan kiertoaikaa). Tällöin nämä suureiden suhteet kertovat suoraan halutun numeroarvon taulukkoa vastaavissa yksiköissä. Redusoidut massat lasketaan Auringon suhteen, eli tässä oletetaan muiden taivaankappaleiden vaikutukset pieniksi.

Lasketaan aluksi Ceres-asteroidin puoliakselin pituus a. Keplerin 3. lain nojalla

$$\frac{a_{\text{Ceres}}^3}{a_M^3} = \frac{\frac{\tau_C^2 k_C}{4\pi^2 \mu_C}}{\frac{\tau_M^2 k_M}{4\pi^2 \mu_M}},$$

missä M tarkoittaa Maata. Sieventämällä

$$\frac{a_{\text{Ceres}}^3}{a_M^3} = \frac{\tau_C^2 k_C \mu_M}{\tau_M^2 k_M \mu_C}.$$

Aurinkokunnan massasta suurin osa on keskittynyt Aurinkoon, joten Maan ja Ceresin redusoidut massat saadaan Auringon massan $M_\odot$ avulla siten, että

$$\mu_C = \frac{m_C M_\odot}{m_C + M_\odot} \quad \text{ja} \quad \mu_M = \frac{m_M M_\odot}{m_M + M_\odot}.$$

k on Newtonin gravitaatiolain kerroin eli jälleen tarkastelemalla Aurinko-Ceres ja Aurinko-Maa systeemejä saadaan

$$k_C = G m_C M_\odot \quad \text{ja} \quad k_M = G m_M M_\odot.$$

Nämä sijoittamalla ja sieventämällä saadaan

$$a_{\text{Ceres}} = \left(\frac{\tau_C^2}{\tau_M^2} \frac{m_C + M_\odot}{m_M + M_\odot}\right)^{1/3} = \left(\frac{4.6035^2}{1^2} \frac{1/8000 + 332830}{1 + 332830}\right)^{1/3} \approx 2.7673\,\text{AU}.$$

Lasketaan sitten Jupiterin kiertoaika. Keplerin 3. lain nojalla

$$\frac{\tau_J^2}{\tau_M^2} = \frac{a_J^3 \mu_J k_M}{a_M^3 \mu_M k_J}.$$

Kuten edellä, $k_J = G m_J M_\odot$ ja

$$\mu_J = \frac{mJ M_\odot}{m_J + M_\odot}.$$

k_M ja μ_M ovat samat kuin aikaisemminkin. Näistä saadaan, että

$$\tau_J = \left(\frac{a_J^3}{a_M^3} \frac{m_M + M_\odot}{m_J + M_\odot} \right)^{1/2} = \left(\frac{5.2028^3}{1^3} \frac{1 + 332830}{317.89 + 332830} \right)^{1/2} \approx 11.8618 \tau_M = 11.8618\,\mathrm{yr}.$$

Lasketaan lopuksi Saturnuksen massa. Jälleen Keplerin 3. laista

$$\frac{\mu_S}{\mu_M} = \frac{\tau_S^2 m_S a_M^3}{\tau_M^2 m_M a_S^3}.$$

Tarkastellaan taas Saturnus–Aurinko- ja Maa–Aurinko-järjestelmiä saadaan redusoisuille massoille

$$\frac{\mu_S}{\mu_S} = \frac{\dfrac{m_S M_\odot}{m_S + M_\odot}}{\dfrac{m_M M_\odot}{m_M + M_\odot}} = \frac{m_S}{m_S + M_\odot} \frac{m_M + M_\odot}{m_M}.$$

Nämä kaksi yhdistämällä saadaan

$$\frac{m_S}{m_S + M_\odot} \frac{m_M + M_\odot}{m_M} = \frac{\tau_S^2 m_S a_M^3}{\tau_M^2 m_M a_S^3},$$

josta Saturnuksen massa ratkaisemalla saadaan

$$m_S = \frac{\tau_M^2 a_S^3}{\tau_S^2 a_M^3} \left(m_M + M_\odot \right) - M_\odot.$$

Lukuarvot sijoittamalla

$$m_S = \frac{1^2 \cdot 9.5388^3}{29.456^2 \cdot 1^3} (1 + 332830) - 332830 \approx 103.47\, m_M.$$

Mainitaan, että laskettu Ceresin puoliakselin pituus ja Jupiterin kiertoaika vastaavat hyvin todellisia mitattuja arvoja, mutta Saturnuksen massassa on pientä heittoa ($m_S \approx 95.2\, m_M$).

Tehtävä 6

Tarkastellaan liikettä voimakentässä $m\ddot{\mathbf{r}} = -c\hat{e}_r/r^2$ (c on vakio), jossa pyörimismäärä $\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} =$ VAKIO. Osoita, että myös vektori $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - c\mathbf{r}/r$ on vakiovektori (tämäkin on esimerkki liikevakiosta).

Ratkaisu:

Osoitetaan, että $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, josta seuraa, että $\mathbf{Q}$ on vakiovektori. Kirjoitetaan pyörimismäärän säilymisen avulla $\dot{\mathbf{Q}}$ muotoon $(\dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L})/m$. Kikkaillaan sitten tulon derivointikaavoilla siten, että $\dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L}$ saadaan kirjoitettua pelkän pituusvektorin normin ja derivaatan avulla, jolloin se saadaan pakotettua juuri samaan muotoon kuin vektorin $\dot{\mathbf{Q}}$ lopputermi, jolloin ne kumoavat toisensa.

Koska $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, niin

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Nyt tulon derivaatalla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}}.$$

Oletuksen nojalla pyörimismäärä säilyy eli $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, joten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L}.$$

Nyt $\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}$, joten voimakentän oletuksesta saadaan

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = -\frac{mc}{r^3}\left(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right).$$

Käyttämällä vektorikolmitulon kaavaa ja normin määritelmää $r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ saadaan

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - r^2\dot{\mathbf{r}}.$$

Pistetulo on kommutatiivinen, joten tulon derivaatalla

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}.$$

Osamäärän derivointikaavan avulla saadaan nyt, että

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = -\frac{mc}{r^3}(r^2\dot{r}\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}) = -mc\left(\frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}\right) = mc\left(\frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{r^2}\right) = mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Siispä

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{0}$$

ja saatiin väite.