Tehtävä 1

Tasa-aineinen kappale muodostuu ympyräkartiosta (korkeus h ja pohjan säde a) ja puolipallosta (säde a), jotka on kiinnitetty toisiinsa ympyränmuotoiset pinnan osat yhteen liittäen. Kappaleella selvästikin on yksi pyörähdyssymmetria-akseli, joka kulkee kartion kärkipisteen ja ympyrän keskipisteen kautta. Olkoon se z-akseli. Täten, jos tarkastellaan pyörimistä sellaisen pisteen ympäri, joka on z-akselilla, on z-akseli symmetria-argumentin perusteella yksi kappaleen kolmesta päähitausakselista. Laske tätä päähitausakselia vastaava päähitausmomentti I_z. Kappaleen tiheys olkoon ρ.

Ratkaisu:

Käytetään edellisen viikon harjoitustehtävää 6.1 avuksi ja osoitetaan, että hitausmomenttitensori **I** on jo valmiiksi diagonaalinen, jolloin päähitausmomentti saadaan suoraan prujun kaavoilla ilman ominaisarvo-ongelman ratkaisemista. Tehtävä on pääasiassa integrointia.

Merkitään kartiota

$$K = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ ja } 0 \le z \le \frac{h}{a}(a - r) \equiv Z \ \right\}$$

sylinterikoordinaateissa ja puolipalloa pallokoordinaateissa

$$P = \left\{ (r, \theta, \phi) : 0 \le r \le a, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi \right\}.$$

Koko kappale olkoon tällöin $E = K \cup P$. Lasketaan aluksi hitausmomenttitensorin ristialkiot. Prujusta

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \iiint_E \rho(-xy)\,\mathrm{d}V = \iiint_K \rho(-xy)\,\mathrm{d}V + \iiint_P \rho(-xy)\,\mathrm{d}V \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^Z \rho\,\underbrace{(r\cos\theta)}_{x}\underbrace{(r\sin\theta)}_{y}\underbrace{r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}V} - \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho\,\underbrace{(r\sin\theta\cos\phi)}_{x}\underbrace{(r\sin\theta\sin\phi)}_{y}\underbrace{r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}V} \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^Z \rho r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r^4\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= \iiint_E \rho(-xz)\,\mathrm{d}V \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^Z \rho r^2\cos\theta z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r^4\sin^2\theta\cos\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
I_{23} &= \iiint_E \rho(-yz)\,\mathrm{d}V \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^Z \rho r^2\sin\theta z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r^4\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Symmetriasta johtuen kaikki ristialkiot ovat nollia. Siispä hitausmomenttitensori on valmiiksi diagonaalimuodossa

$$
\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}.
$$

Erityisesti $I_z = I_{33}$, joten

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint_E \rho(x^2+y^2+z^2-z^2)\,\mathrm{d}V = \iiint_E \rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^Z \rho r^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{10}a^4h\pi\rho + \frac{4}{15}a^5\pi\rho = \frac{1}{30}\pi a^4\rho(8a+3h).
\end{aligned}
$$

Tehtävä 2

Haetaan vielä tuntumaa jäykän kappaleen pyörimiseen Eulerin yhtälöiden [luentonuotit (9.26)] kautta. Kyse on siis *vapaasta* pyörimisestä, jota tarkastellaan yhtälöiden perusteella kvalitatiivisesti. Tieto kappaleen muodosta on parametreissa I_1, I_2, I_3 ja alkuehto annetaan vektorina $\vec{\omega}_0 = (\omega_1(t = 0), \omega_2(t = 0), \omega_3(t = 0))$, joissakin sopivissa yksiköissä. Päättele (9.26):sta mitä alkaa tapahtua seuraavissa tapauksissa:

(a) $(I_1, I_2, I_3) = (1, 1, 2)$ ja $\vec{\omega}_0 = (0, 0, 1)$,

(b) $(I_1, I_2, I_3) = (1, 1, 2)$ ja $\vec{\omega}_0 = (0, 1, 1)$,

(c) $(I_1, I_2, I_3) = (1, 1, 2)$ ja $\vec{\omega}_0 = (1, 0, 0)$,

(d) $(I_1, I_2, I_3) = (1, 1, 1)$ ja $\vec{\omega}_0 = (1, 1, 1)$,

(e) $(I_1, I_2, I_3) = (1, 1, 2)$ ja $\vec{\omega}_0 = (1, 1, 1)$,

Ratkaisu:

Kaikissa kohdissa hyödynnetään Eulerin liikeyhtälöitä vapaalle pyörimiselle:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

Sijoitetaan annetut hitausmomentin Eulerin liikeyhtälöihin ja päätellään alkuehdon avulla, mitä tapahtuu.

(a) Sijoittamalla annetut hitausmomenttien arvot Eulerin liikeyhtälöihin saadaan

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1 \\ 2\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} .$$

Näistä nähdään, että $\dot{\omega}_3 = 0$, eli kulmanopeus 3. pyörimisakselin suhteen ei muutu. Alkuehdon kanssa tämä siis antaa, että pyöriminen tapahtuu vakiokulmanopeudella 1. Näin ollen jää yhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_1 \end{cases} .$$

Koska 1. ja 2. akselin kulmanopeuksien muutokset riippuvat toisistaan, ja koska alkuehdon nojalla $\omega_0^{(1)} = \omega_0^{(2)} = 0$, niin pyörimistä näiden akseleiden suhteen ei tapahdu ollenkaan. Siispä kappale pyörii koko ajan samalla tavalla kuin alussakin.

(b) Liikeyhtälöt ovat samat kuin (a)-kohdassa:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1 \\ 2\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases},$$

joten jälleen $\dot{\omega}_3 = 0$ eli pyöriminen 3. akselin suhteen pysyy koko ajan samana. (a)-kohdasta poiketen nyt kulmanopeus alussa 2. akselin suhteen onkin nollasta poikkeava, jolloin jäljelle jäävät yhtälöt

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_1 \end{cases}$$

kuvaavat oskilloivaa ilmiötä: koska $\omega_0^{(2)} = 1$, niin tällöin $\dot{\omega}_1 = -1 < 0$ eli se alkaa vähenemään. Tämän seurauksena myös ω_2 alkaa vähenemään, josta puolestaan seuraa, että ω_1 alkaa kasvamaan ja siten myös ω_2 kasvaa ja niin edelleen.

(c) Liikeyhtälöt ovat edelleen samat kuin aiemmin:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1 \\ 2\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases},$$

Kuitenkin nyt $\omega_0^{(3)} = 0$, joten kulmataajuus 3. akselin suhteen pysyy samana eli nollana. Siispä kappale ei pyöri ollenkaan 3. akselin suhteen. Kuitenkin tällöin myös $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$, eli nämäkään kulmanopeudet eivät muutu. Kappale pyörii siis koko ajan samalla tavalla kuin alussa.

(d) Nyt liikeyhtälöiksi tulee $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$, eli pyöriminen ei muutu ollenkaan. Kappale pyörii siis koko ajan samalla tavalla kuin alussakin.

(e) Liikeyhtälöt ovat nyt tutut

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1 \\ 2\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}.$$

Jälleen pyöriminen 3. akselin suhteen ei muutu. Tällöin alussa $\dot{\omega} < 0$ eli se alkaa vähenemään. Tämän seurauksena alussa oleva $\dot{\omega}_2 > 0$ alkaa myöskin vähenemään. Nyt siis ω_2 vaihtaa merkkiä eli pyöriminen 2. akselin suhteen kääntyy toiseen suuntaan. Pyöriminen ei kuitenkaan vaihda heti suuntaa, mutta kun suunta vaihtuu, niin tällöin $\dot{\omega}_1 > 0$ eli se alkaakin kasvamaan. Tilanne on siis näiden kahden pyörimisakselin kohdalla samankaltainen kuin (b)-kohdassa, oskillointi on vain erilaista (siinä on esimerkiksi viivettä).

Tehtävä 3

Liittyy luentoesimerkkiin 9.36, siinä tapauksiin 'frisbeen heitto' [F] ja 'amerikkalaisen jalkapallon heitto' [A]. Teoria tehtiin kappaleeseen kiinnitetyssä rot-koordinaatistossa ja Ω kertoo väpätyksen eli prekession taajuuden rot-koordinaatistossa: $\Omega_F \sim \omega_3$ ja $\Omega_A \sim \frac{1}{2}\omega_3$. Voit olettaa, että kumpaakin heitetään 'hyvin' siten, että kappaleen koordinaatistossa $\vec{\omega} \approx (0, 0, \omega_3)$. Millä taajuudella kappaleet väpättävät fix-koordinaatistossa?

Ratkaisu:

Myötäillään kirjan esimerkkejä 11.11 ja 11.12 ja lasketaan prekessio Eulerin kulman ϕ aikaderivaatan avulla. Valitaan koordinaatisto sopivasti, jolloin relaation $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ avulla voidaan kirjoittaa $\dot{\phi}$ päähitausmomenttien avulla.

Asetetaan fix-koordinaatisto niin, että $\mathbf{L} \parallel x_3'$. Olkoon tällöin θ rot-koordinaattiakselin x_3 ja fix-koordinaattiakselin x_3' välinen kulma, joka on nyt siis pyörimismäärän $\mathbf{L}$ ja akselin x_3' välinen kulma.

Oletetaan sitten, että $I_1 = I_2$. Tällöin

$$\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{L} \cdot (\omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2) = I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_1\omega_2 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0$$

eli $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ ja $\mathbf{e}_3$ ovat samassa tasossa, missä siis $\mathbf{e}_i$ on rot-koordinaatiston kantavektoreita. Pyöritetään koordinaatistoa niin, että $\mathbf{e}_2$ on tässä tasossa. Tällöin

$$\mathbf{L} = L(0, \sin\theta, \cos\theta),$$

missä $L = \|\mathbf{L}\|$. Vastaavasti merkitään kulmanopeuden $\boldsymbol{\omega}$ ja rot-koordinaattiakselin x_3 välistä kulmaa α, jolloin

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(0, \sin\alpha, \cos\alpha),$$

missä $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Siispä

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (0, I_2\omega\sin\alpha, I_3\omega\cos\alpha) = (0, I_1\omega\sin\alpha, I_3\omega\cos\alpha),$$

joten

$$\frac{L_2}{L_3} = \tan\theta = \frac{I_1}{I_3}\tan\alpha.$$

Toisaalta $\psi = 0$, joten

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = \dot{\phi}\sin\theta.$$

Sijoittamalla saadaan, että

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_2}{\sin\theta} = \omega\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = \omega\frac{L_2}{I_1\omega}\frac{L}{L_2} = \frac{L}{I_1} = \omega\frac{\sqrt{I_1^2 + I_3^2}}{I_1}.$$

Nyt $\dot{\phi}$ on kysytty prekession taajuus fix-koordinaatistossa. Prujusta saadaan, että frisbeelle $I_1 = I_2 \sim \frac{1}{4}mr^2$, $I_3 \sim \frac{1}{2}mr^2$, joten

$$\dot{\phi}_F \sim \sqrt{5}\omega_3',$$

sillä oletettiin, että $\boldsymbol{\omega} \approx (0, 0, \omega_3) \approx (0, 0, \omega_3')$. Vastaavasti amerikkalaiselle jalkapallolle $I_1 = I_2 \sim 2I_3$, eli

$$\dot{\phi}_A \sim \frac{\sqrt{5}}{2}\omega_3'.$$

Tehtävä 4

Sanotaan, että kissa putoaa aina jaloilleen, kunhan putoaminen kestää riittävän kauan. Hyvänä approksimaationa kissa putoaa vapaasti ja sen kokonaispyörimismäärä pysyy vakiona (se olkoon tässä $\vec{L} = \vec{0}$). Kissa kääntää itsensä muuttamalla sopivasti muotoaan. Yksinkertainen tapa ja sen yksinkertaistettu malli on kuvassa alla. Käy läpi vaiheet $a \to b \to c \to d \to e$, selitä mitä kussakin vaiheessa tapahtuu ja miksi kissan pyörimismäärä ei tällaisissa vaiheissa todellakaan muutu.

Ratkaisu:

Osoitetaan, että koko pyörähdysliikkeen aikana $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, josta seuraa, että pyörimismäärä säilyy eikä se siten voi muuttua. Tämä voidaan osoittaa hyödyntämällä tietoa $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ ja sitä, että symmetriasta johtuen koko ajan $\mathbf{N} = \mathbf{0}$.

$a \to b$

Kissa alkaa tuomaan etu- ja takajalkojaan lähemmäs toisiaan. Kun oletetaan, että ainoa kissaan vaikuttava voima on gravitaatio, niin tällöin (olettaen putoaminen levosta) kissan liike on voiman suuntaista. Tällöin peruskurssien tiedoilla kissaan kohdistuva vääntömomentti on sama kuin massakeskipisteeseen kohdistuva vääntömomentti. Kun kissa taittaa jalkansa symmetrisesti, niin symmetriasyistä kahden sylinterin massakeskipiste on voimasuoralla. Siispä kissaan kohdistuva vääntömomentti on nolla, joten $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

$b \to c$

Kissa on nyt tuonut etu- ja takajalkansa yhteen. Kissa pyöräyttää nyt kehoaan niin, että vastakkain olleet jalat osoittavat toisistaan pois. Sylinterien asento ei tässä muutu, joten samalla symmetria-argumentilla vääntömomenttia ei ole eli $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

$c \to d$

Kissa suoristaa nyt itsensä (eli periaattessa $a \to b$ mutta toiseen suntaan), jolloin edellisen kohdan pyöräytyksen ansiosta kissan jalat ovat nyt maata kohti. Kun tämäkin suoristus tehdään symmetrisesti niin, että kahden sylinterin massakeskipiste on voimasuoralla, niin vääntömomentti on edelleen nolla ja siten $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

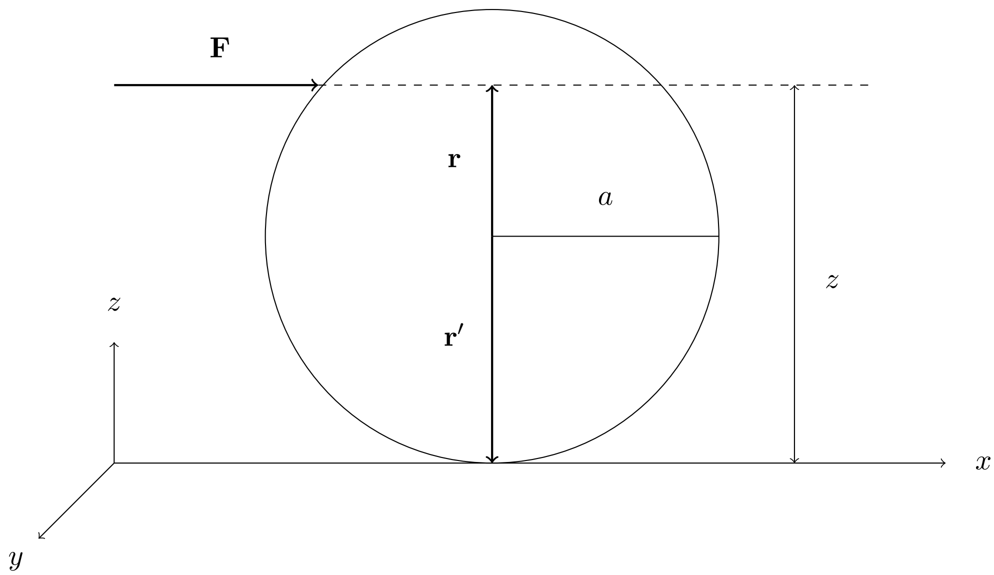
Siispä koko prosessin ajan $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, joten pyörimismäärä pysyy koko ajan samana.

Tehtävä 5

Mille korkeudelle biljardipöydällä levossa olevaa biljardipalloa (säde a) pitää biljardikepillä lyödä, jotta se lähtee liikkeelle vierien ja liukumatta. Oleta vaakasuora lyönti, hetkellinen kosketus ja kitkattomuus.

Ratkaisu:

Tarkastellaan Kuvan 1 mukaista tilannetta aluksi fix-koordinaatistosta.



Kuva 1: Tehtävän asetelma.

Lasketaan vaakasuoran lyönnin aikaansaaman impulssin vaikutus liike- ja pyörimismääriin. Näiden avulla saadaan prujun pyörivän koordinaatiston nopeuksien muunnoskaavan avulla laskettua pallon ja pinnan kontaktipisteen nopeus. Asetetaan tämä nollaksi ja ratkaistaan lyöntikorkeus z.

Kun lyöntiin kuluu lyhyt aika T, palloon kohdistuu impulssi

$$\mathbf{J} = \int_0^T \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t,$$

missä $\mathbf{F}(t)$ on palloon kohdistuva voima ajan funktiona. Newtonin 2. lain mukaan $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ ja pyörimismäärän säilymisestä saadaan $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Tällöin aikavälillä $[0, T]$ pätee Analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_0^T \dot{\mathbf{p}}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}(T) - \mathbf{p}(0) = \mathbf{J} = \int_0^T \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

ja

$$\int_0^T \dot{\mathbf{L}}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{L}(T) - \mathbf{L}(0) = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \int_0^T \mathbf{r} \times \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alussa pallo on levossa, joten $\mathbf{p}(0) = \mathbf{L}(0) = \mathbf{0}$, joten

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(T) = \mathbf{J} \quad \text{ja} \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(T) = \mathbf{r} \times \mathbf{J}.$$

Tarkastellaan sitten biljardipallon ja alustan välisen kontaktipisteen nopeutta $\mathbf{v}$. Prujun luvusta 8.1 saadaan, että

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}',$$

missä $\mathbf{v}$ on kontakipisteen nopeus fix-koordinaatistossa, $\dot{\mathbf{R}}$ biljaripallon nopeus fix-koordinaatistossa, $\boldsymbol{\omega}$ rot-koordinaatiston kulmanopeus ja $\mathbf{r}' = -a\hat{\mathbf{z}}$ kontakipisteen paikkakoordinaatti biljardipalloon kiinnitetyssä rot-koordinaatistossa. Oikean käden säännöllä $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{y}}$ ja lisäksi koordinaatiston valinnasta seuraa, että $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{J}/J$, missä $J = \|\mathbf{J}\|$. Toisaalta prujun luvusta 7.2 saadaan, että M-massaiselle biljardipallolle $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{R}}$, joten koska $\mathbf{p} = \mathbf{J}$, niin

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{M} + \omega\hat{\mathbf{y}} \times (-a\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mathbf{J}}{M} - a\omega\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{J}}{M} - a\omega\frac{\mathbf{J}}{J} = \mathbf{J}\left(\frac{1}{M} - \frac{a\omega}{J}\right).$$

Näin ollen

$$v \equiv \|\mathbf{v}\| = J\left(\frac{1}{M} - \frac{a\omega}{J}\right) = \frac{J}{M} - a\omega.$$

Jotta biljardipallo ei liukuisi, täytyy heti lyönnin jälkeen olla $v = 0$. Siispä

$$\frac{J}{M} - a\omega = 0.$$

Käytetään tunnettua pallon hitausmomenttitensoria

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}Ma^2 \end{bmatrix},$$

joten $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$, missä $I = \frac{2}{5}Ma^2$. Toisaalta aiemmin nähtiin, että $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$. Valitussa koordinaatistossa $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{z}} = (z-a)\hat{\mathbf{z}}$, joten

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = (z-a)\hat{\mathbf{z}} \times J\hat{\mathbf{x}} = J(z-a)\hat{\mathbf{y}}.$$

Myöskin $\hat{y} = \boldsymbol{\omega}/\omega$, joten näistä seuraa, että

$$\omega = \frac{J(z-a)}{I} = \frac{5J(z-a)}{2Ma^2}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön $J/M = a\omega$ saadaan, että

$$\frac{J}{M} - \frac{5J(z-a)}{2Ma} = 0 \iff z = \frac{7}{5}a.$$

Tehtävä 6

Alla on kuva ja mittausdataa voltista suorana taaksepäin kädet kyljissä (adducted) ja levitettyinä (abducted). Tilanne on epäideaalinen sikäli, että urheilijan asento ei ole aivan symmetrinen, josta seuraa voltin kiertyminen (twist). Taulukon ensimmäinen sarake on volttien lukumäärä, toinen sarake on epäideaalisuus. Selitä taulukon mittaustulokset (twist) kvalitatiivisesti luentoesimerkin 9.38 perusteella.

Ratkaisu:

Lähtökohtaisesti twist aiheutuu siitä, että tennismailateoreeman mukaan pyöriminen 2. akselin suhteen on epästabiilia, kun $I_1 < I_2 < I_3$. Ihmisen massajakaumasta johtuen voltti vastaa nimenomaan pyörimistä 2. päähitausakselin suhteen. Mitä suurempi lähtövirhe (arm symmetry) eli se, miten paljon pyörimistä on muiden akseleiden suhteen heti alussa, sitä suurempaa pyöriminen muiden akselien suhteen on lopussa, eli siis twist.

Kun kädet ovat kyljissä kiinni (adducted), niin henkilön hitausmomentti on pienempi kuin kädet suorana (abducted), sillä sama määrä massaa on ensimmäisessä lähempänä massakeskipistettä kuin toisessa. Luentoprujun esimerkissä 9.38 on näytetty, että pyörimiseen asetetun häiriön λ kulmataajuus 2. akselin kohdalla on

$$\Omega_2 = \sqrt{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)/I_1 I_3} = ki,$$

missä $k = \sqrt{|(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)|/I_1 I_3}$ on hitausmomenteista riippuva vakio. Kun I_2 kasvaa, niin myös k kasvaa. Häiriöyhtälön $\ddot{\lambda} + \Omega_2^2 \lambda = 0$ ratkaisu on tällöin muotoa

$$\lambda(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$$

eli häiriö kasvaa eksponentiaalisesti. Lisäksi, kun I_2 kasvaa, myös häiriön kasvunopeus kasvaa. Tämä selittää sen, miksi twist-arvot kädet kyljessä (adducted) ovat pienempiä kuin kädet auki (abducted): hitausmomentti kädet kyljessä on pienempi, joten häiriökin kasvaa hitaammin.

Häriöyhtälön ratkaisu selittää myös sen, miksi virhe (twist) on suurempaa kahden voltin tapauksessa. Kahteen volttiin kuluu pidempi aika, jolloin häiriökin ehtii kasvaa suuremmaksi.