Tehtävä 1

Jatkoa laskuharjoitustehtävään 3:4. Tarkastelaan nyt pieniä heilahteluja. Kappale, jonka massa on M, liukuu kitkatta vaakasuoraa kiskoa pitkin. Kappaleesta on ripustettu heiluri, jonka varsi (pituus b) on massaton ja varren päässä on kappale, jonka massa on m. Heilurin hetkellinen heilahduskulma olkoon θ ja kappaleen hetkellinen sijainti olkoon x. Kaikki liike tapahtuu kuvan tasossa.

(a) Muodosta systeemin liike-energian ja potentiaalienergian lausekkeet.

(b) Tee T:lle ja U:lle pienten heilahdusten approksimaatio.

(c) Muodosta matriisit $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$ siten, että ne ovat symmetriset.

(d) Muodosta karakteristinen polynomi $P(\omega^2) = \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m})$.

(e) Määritä systeemin ominaistaajuudet ω_1 ja ω_2 ratkaisemalla $P(\omega^2) = 0$ (eli 2. asteen yhtälö ω^2:lle).

(f) Määritä ominaistaajuuksia vastaavat ominaisvektorit $\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_2$. Päättele niistä ominaismoodien luonne.

Ratkaisu:

(a)-kohta saadaan suoraan 3. demoista. (b)-kohdassa tehdään pienen kulman approksimaatio siten, että näkyviin saadaan kvadraattiset termit. (c)-kohdassa luetaan T:n ja U:n lausekkeista matriisit $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$. (d)-kohdassa lasketaan $P(\omega^2) = \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m})$, mikä tulee suoraan prujusta. (e)-kohdassa ratkaistaan edellä saatu yhtälö $P(\omega^2) = 0$. (f)-kohdassa sijoitetaan ratkaistut ominaistaajuudet ω^2 takaisin yhtälöön $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2\mathbf{m}\vec{a}$ ja ratkaistaan $\vec{a}$.

(a) Merkitään M-massaisen kappaleen koordinaatteja x_M ja y_M. Tällöin geometrian perusteella punnuksen koordinaatit ovat

$$x_m = x_M + b\sin\theta \quad \text{ja} \quad y_m = y_M - b\cos\theta.$$

Tällöin

$$\dot{x}_m = \dot{x}_M + b\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{ja} \quad \dot{y}_m = \dot{y}_M + b\dot{\theta}\sin\theta,$$

joten

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{x}_M\dot{\theta}\cos\theta\right).$$

Potentiaalienergiaksi tulee

$$U = mgb(1 - \cos\theta),$$

kun nollatasoksi asetetaan $U(\theta = 0) = 0$.

(b) Käytetään pienen kulman approksimaatiota kvadraattisten termien etsimiseen. Kun $\theta \ll 1$, niin tällöin $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Tällöin

$$T \simeq \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{x}_M\dot{\theta}\right)$$

ja

$$U \simeq \frac{1}{2}mgb\theta^2.$$

(c) Kirjoitetaan edellä saatu liike-energian lauseke muotoon

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\cdot 2b\dot{x}_M\dot{\theta},$$

josta nähdään, että

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M+m & mb \\ mb & mb^2 \end{bmatrix}$$

Potentiaalienergian lausekkeesta nähdään suoraan, että

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgb \end{bmatrix}.$$

(d) Nyt

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m}) \\ &= \begin{vmatrix} -\omega^2(M+m) & -m\omega^2 b \\ -m\omega^2 b & mb(g - \omega^2 b) \end{vmatrix} \\ &= \omega^4 b^2 mM - \omega^2 bgm(M+m). \end{aligned}$$

(e) Asettamalla $P(\omega^2) = 0$ nähdään, että $\omega^2 = 0$ tai

$$\omega^2 = \frac{g}{Mb}(M+m).$$

Tällöin

$$\omega_1 = 0 \quad \text{ja} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{Mb}(M+m)}.$$

(f) Sijoitetaan vuorotellen ω^2 takaisin yhtälöön $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2 \mathbf{m}\vec{a}$. Kun $\omega_1^2 = 0$, niin

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgb \end{bmatrix} \vec{a}_1 = \vec{0} \iff \begin{cases} a_1^{(1)} \in \mathbb{R} \\ a_1^{(2)} = 0 \end{cases},$$

joten $\vec{a}_1 = (1, 0)$, joka on symmetrinen moodi. Kun taas $\omega_2^2 = g(M+m)/Mb$, niin

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{g}{Mb}(M+m) \begin{bmatrix} M+m & mb \\ mb & mb^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

eli

$$\begin{cases} \dfrac{g}{Mb}(M+m)\left((M+m)a_2^{(1)} + mba_2^{(2)}\right) = 0 \\ mbga_2^{(2)} = \dfrac{g}{Mb}(M+m)\left(mba_2^{(1)} + mb^2a_2^{(2)}\right) \end{cases},$$

josta

$$\begin{cases} (M+m)a_2^{(1)} + mba_2^{(2)} = 0 \\ a_2^{(2)}\left(1 - \dfrac{M+m}{M}\right) - \dfrac{M+m}{Mb}a_2^{(1)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \\ a_2 = -\dfrac{M+m}{mb}a_1 \end{cases}.$$

Näin ollen $\vec{a}_2 = \left(1, -\frac{M+m}{mb}\right)$, joka on puolestaan antisymmetrinen moodi.

Tehtävä 2

Kuvan mukainen järjestelmä koostuu kahdesta vasen-oikea-suunnassa kitkattomasti liukuvasta kappaleesta (massat $2m$ ja m) sekä kahdesta harmonisesta jousesta (kummankin jousivakio k). Kuvassa vasemmalla oleva massiivinen seinä ei liiku kuten ei lattiakaan.

(a) Valitse koordinaatit siten, että kappaleen 1 sijainti x_1 mitataan suhteessa seinään, kappaleen 2 sijainti x_2 mitataan suhteessa kappaleeseen 1 ja järjestelmän tasapainoasemassa $x_1 = x_2 = 0$. Kirjoita järjestelmän liike- ja potentiaalienergian lausekkeet. Muodosta kytkettyjen värähtelyjen teorian matriisit $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$.

(b) Osoita, että järjestelmän ominaistaajuuksille pätee $\omega^2 = (1 \pm 1/\sqrt{2})k/m$.

(c) Selvitä järjestelmän ominaismoodien luonne.

Ratkaisu:

(a)-kohdassa kirjoitetaan T ja U tarkasti annetussa koordinaatistossa, jonka jälkeen niistä voidaan lukea suoraan $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$. (b)-kohdassa ratkaistaan yhtälö $P(\omega^2) = 0$. (c)-kohdassa sijoitetaan (b)-kohdassa saadut ominaistaajuudet yhtälöön $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2\mathbf{m}\vec{a}$ ja ratkaistaan ominaismoodit.

(a) Oletetaan, että jouset ovat massattomia. Tällöin

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 = m\left(\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2\right),$$

josta nähdään suoraan, että

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Kun valitaan potentiaalienergian nollataso siten, että gravitaatiopotentiaalienergia on nolla, niin

$$U = \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right) = \frac{1}{2}k\left(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right).$$

Tästä nähdään, että

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2k & k \\ k & k \end{bmatrix}.$$

(b) Edellisen kohdan mukaan

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m}) \\ &= \begin{vmatrix} 2k - 2m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= 2(k - m\omega^2)^2 - k^2 \\ &= 2m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + k^2. \end{aligned}$$

Yhtälön $P(\omega^2) = 0$ ratkaisuksi tulee sitten

$$\omega^2 = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{k}{m}.$$

(c) Ratkaistaan ominaismoodit yhtälöstä $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2 \mathbf{m}\vec{a}$. Nyt

$$\begin{bmatrix} 2k & k \\ k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2ka_1 + ka_2 - 2m\omega^2 a_1 = 0 \\ ka_1 + ka_2 - m\omega^2 a_2 = 0 \end{cases}.$$

(b)-kohdan avulla tästä saadaan, että

$$\begin{cases} \mp\sqrt{2}a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 = 0 \end{cases},$$

jonka ratkaisuksi tulee

$$a_2 = \pm\sqrt{2} a_1.$$

Siispä $\vec{a} = (1, \pm\sqrt{2})$. Kun merkki on positiivinen, kyseessä on symmetrinen moodi ja vastaavasti negatiivisella merkillä antisymmetrinen moodi.

Tehtävä 3

Tarkastele kolmea kytkettyä heiluria, joiden muodostamalle systeemille joissakin yksiköissä ($m > 0$ ja $k > 0$)

$$T(\dot{\theta}_k) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \qquad U(\theta_k) = \frac{1}{2}k(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_3 - 2\varepsilon\theta_2\theta_3).$$

Kytkentä (parametri $\varepsilon > 0$) johtuu elastisesta tangosta, johon heilurit on ripustettu. Laske ominaisutaajuudet.

Ratkaisu:

Luetaan annetuista T:n ja U:n lausekkeista matriisit $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$, jonka jälkeen ratkaistaan yhtälöstä $P(\omega^2) = 0$ ominaistaajuudet. Tämän jälkeen ratkaistaan ominaismoodit yhtälöstä $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2\mathbf{m}\vec{a}$ edellä laskettujen ominaistaajuuksien avulla.

Energioiden lausekkeista nähdään suoraan, että

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & k & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & k \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= = \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m}) \\ &= \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & k - m\omega^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & k - m\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= k^3 - 3k\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 - 3k^2m\omega^2 + 3m\varepsilon^2\omega^2 + 3km^2\omega^4 - m^3\omega^6 \\ &= \left(k - 2\varepsilon - m\omega^2\right)\left(k + \varepsilon - m\omega^2\right)^2, \end{aligned}$$

joten yhtälön $P(\omega^2) = 0$ ratkaisuksi tulee siten

$$\omega^2 = \frac{k - 2\varepsilon}{m} \quad \text{tai} \quad \omega^2 = \frac{k + \varepsilon}{m},$$

missä jälkimmäinen juuri on kaksoisjuuri. Ominaistaajuudet ovat siis

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k - 2\varepsilon}{m}} \quad \text{ja} \quad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{k + \varepsilon}{m}}.$$

Näitä vastaavat ominaismoodit saadaan ratkaisemalla yhtälö $\mathbf{A}\vec{a} = \omega^2\mathbf{m}\vec{a}$. Mathematican avulla

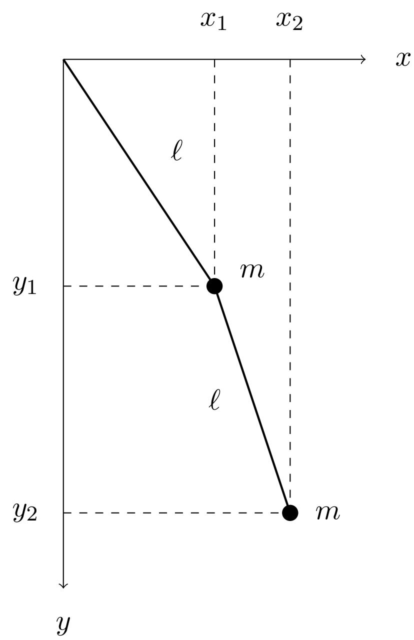
$$\vec{a}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (-1, 0, 1) \quad \text{ja} \quad \vec{a}_3 = (-1, 1, 0).$$

Näistä $\vec{a}_1$ on symmetrinen, $\vec{a}_2$ ja $\vec{a}_3$ ovat antisymmetrisiä.

Tehtävä 4

Tarkastele kaksoisheiluria, jossa tavallisen tasoheilurin (varren pituus ℓ ja punnuksen massa m) punnukseen on ripustettu toinen samanlainen heiluri. Oletetaan, että kumpikin heiluri pysyy samassa tasossa. Johda ELY:itä käyttäen liikeyhtälöt heilureiden heilahduskulmille eli muuttujille θ_1 ja θ_2.

Ratkaisu:



Kuva 1: Kaksoisheilurin koordinaatisto.

Valitaan koordinaatisto Kuvan 1 mukaisesti, jonka avulla kirjoitetaan T ja U kulmamuuttujien θ_1 ja θ_2 avulla. Derivoimalla näitä saadaan ELY:n avulla liikeyhtälöt kulmamuuttujille.

Potentiaalin nollatasoksi valitaan x-akseli. Tällöin

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

ja

$$U = -mg(y_1 + y_2).$$

Tilanteen geometrian perusteella

$$\begin{cases} x_1 = \ell \sin\theta_1 \\ x_2 = \ell \cos\theta_1 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \ell \sin\theta_2 = \ell(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \\ y_2 = y_1 + \ell \cos\theta_2 = \ell(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{cases}.$$

Näistä seuraa, että

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ell\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y}_1 = -\ell\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \ell(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_2) \\ \dot{y}_2 = -\ell(\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin\theta_2) \end{cases}.$$

Siispä

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta)\right)$$

ja

$$U = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Lagrangianiksi tulee siten

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta)\right) + mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Johdetaan sitten liikeyhtälö 1. kulmamuuttujalle θ_1. Derivoimalla

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mg\ell\sin\theta_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m\ell^2 \left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m\ell^2 \left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Siispä ELY:n avulla saadaan sievennyksen jälkeen

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2g}{\ell}\sin\theta_1 = 0.$$

Vastaavasti 2. kulmamuuttujalle θ_2 saadaan, että

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mg\ell\sin\theta_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m\ell^2 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m\ell^2 \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

ELY:stä saadaan sitten, että

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0.$$

Liikeyhtälöiksi tulee siis

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2g}{\ell} \sin\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0 \end{cases}.$$

Tehtävä 5

Tasoheilurin varren pituus on ℓ, punnuksen massa m ja punnukseen on ripustettu toinen samanlainen heiluri Oleta, että kumpikin heiluri pysyy kuvan tasossa. Muodosta tämän systeemin liike-energian ja potentiaalienergian lausekkeet pienille värähtelyille eli nouki edellisestä tehtävästä T:hen ja U:hun mukaan vain kvadraattiset termit. Määritä ominaistaajuudet.

Ratkaisu:

Otetaan T ja U edellisestä tehtävästä, ja otetaan esille kvadraattiset termit. Tämän jälkeen luetaan approksimoiduista lausekkeista $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{A}$. Ominaistaajuudet saadaan sitten yhtälöstä $P(\omega^2) = 0$.

Käytetään pienen kulman approksimaatiota $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, jolloin edellisen tehtävän avulla

$$T \simeq \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$$

ja

$$U \simeq \frac{1}{2}mg\ell\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right).$$

Näistä muodoista nähdään, että

$$\mathbf{m} = m\ell^2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A} = mg\ell\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
P(\omega^2) &= \det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{m}) \\
&= \begin{vmatrix} 2m\ell(g - \omega^2\ell) & -\omega^2 m\ell^2 \\ -\omega^2 m\ell^2 & m\ell(g - \omega^2\ell) \end{vmatrix} \\
&= 2m^2\ell^2(g - \omega^2\ell)^2 - \omega^4 m^2\ell^4 \\
&= \omega^4 m^2\ell^4 - 4m^2 g\ell^3\omega^2 + 2m^2g^2\ell^2 = 0 \\
&\iff \omega^4 - \frac{4g}{\ell}\omega^2 + \frac{2g^2}{\ell^2} = 0 \\
&\iff \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{\ell}.
\end{aligned}$$

Ominaistaajuudet ovat siis

$$\omega_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{ja} \quad \omega_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Tehtävä 6

Kaksi jousilla (jousivakiot κ) seiniin kiinnitettyä kappaletta (massat m) on kontaktissa toisiinsa kuvan mukaisella tavalla ja vain kuvassa vaakasuora liike sallitaan. Kappalten välisestä kitkasta johtuvat voimat ovat suoraan verrannolliset kappalten nopeuseroon eli ylemmän kappaleen 2 alempaan kappaleeseen 1 kohdistama voima on $-\beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, missä β on vakio. Kirjoita liikeyhtälöt, tee sopiva yrite ja tarkastele (kahdenlaisia) moodeja tässä järjestelmässä.

Ratkaisu:

Kirjoitetaan liikeyhtälöt Newtonin mekaniikalla. Niistä n omioiden tehdään yrite muotoa $x = A\exp(\alpha t)$ ja sijoitetaan tämä liikeyhtälöihin ja ratkaistaan α kirjoittamalla yhtälöpari matriisimuotoon ja vaatimalla, että determinantti häviää (eli sama miten ominaistaajuuksien teoria johdettiin prujussa). Kun ominaistaajuudet α on ratkaistu, voidaan varsinainen ratkaisu $x(t)$ kirjoittaa, josta nähdään, että kaksi ominaistaajuutta vastaa pelkkää oskillointia ja toiset kaksi vaimenemista.

Kappaleeseen 1 kohdistuu voima

$$\mathbf{F}_1 = -kx_1 - \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

ja vastaavasti kappaleeseen 2 kohdistuva voima on

$$\mathbf{F}_2 = -kx_2 - \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

Newtonin 2. lain nojalla liikeyhtälöiksi tulee

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \kappa x_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \kappa x_2 = 0 \end{cases}.$$

Voitaisiin arvella, että systeemin liike tulee olemaan vaimenevaa värähtelyä. Tällöin kompleksinen eksponenttifunktio tuntuu luontevalta valinnalta kuvamaan liikettä, joten tehdään yrite

$$x_i = x_i(t) = A_i \exp(\alpha t),$$

missä $\alpha \in \mathbb{C}$. Derivoimalla saadaan, että $\dot{x}_i = \alpha A_i \exp(\alpha t)$ ja $\ddot{x}_i = \alpha^2 A_i \exp(\alpha t)$ ja sijoittamalla nämä liikeyhtälöihin saadaan

$$\begin{cases} m\alpha^2 A_1 \exp(\alpha t) + \beta(\alpha A_1 \exp(\alpha t) - \alpha A_2 \exp(\alpha t)) + \kappa A_1 \exp(\alpha t) = 0 \\ m\alpha^2 A_2 \exp(\alpha t) + \beta(\alpha A_1 \exp(\alpha t) - \alpha A_2 \exp(\alpha t)) + \kappa A_2 \exp(\alpha t) = 0 \end{cases}.$$

Tästä saadaan, että

$$\begin{cases} m\alpha^2 A_1 + \alpha\beta(A_1 - A_2) + \kappa A_1 = 0 \\ m\alpha^2 A_2 + \alpha\beta(A_1 - A_2) + \kappa A_2 = 0 \end{cases}.$$

Merkitään sitten $\mathbf{a} = (A_1, A_2)$ ja

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} m\alpha^2 + \alpha\beta + \kappa & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & m\alpha^2 + \alpha\beta + \kappa \end{bmatrix},$$

jolloin edellinen yhtälöpari voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi $\mathbf{Ba} = \mathbf{0}$. Tällä yhtälöllä on epätriviaali ratkaisu jos ja vain jos $\det \mathbf{B} = 0$ eli

$$\begin{vmatrix} m\alpha^2 + \alpha\beta + \kappa & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & m\alpha^2 + \alpha\beta + \kappa \end{vmatrix} = \left(m\alpha^2 + \alpha\beta + \kappa\right)^2 - \alpha^2\beta^2 = 0.$$

Ratkaisuksi tulee siten

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{tai} \quad \alpha = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \kappa m}}{m}.$$

Lopullinen ratkaisu on siten näiden lineaarikombinaatio eli

$$x_1(t) = \underbrace{A_{11}e^{i\sqrt{\kappa/m}} + C_{11}e^{-i\sqrt{\kappa/m}}}_{\text{oskillointi}} + \underbrace{e^{-\beta t/m}}_{\text{vaimeneminen}} \left(A_{12}e^{t\sqrt{\beta^2-\kappa m}/m} + C_{12}e^{-t\sqrt{\beta^2-\kappa m}/m}\right)$$

ja

$$x_2(t) = A_{21}e^{i\sqrt{\kappa/m}} + C_{21}e^{-i\sqrt{\kappa/m}} + e^{-\beta t/m} \left(A_{22}e^{t\sqrt{\beta^2-\kappa m}/m} + C_{22}e^{-t\sqrt{\beta^2-\kappa m}/m}\right)$$

joillakin vakioilla A_{ij}, C_{ij}. Ratkaisuista nähdään, että ominaistaajuuksia $\alpha = \pm i\sqrt{k/m}$ vastaava moodi vastaa sellaista tilannetta, jossa systeemi oskilloi ikuisesti. Näin voi olla vain jos kitka ei vaikuta eli silloin, kun kappaleet liikkuvat samalla tavalla (niiden keskinäinen nopeus on nolla), mikä vastaa symmetrisestä moodia. Ominaistaajuuksia $\alpha = (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \kappa m})/m$ vastaa puolestaan se tilanne, jossa värähtely vaimenee eli silloin kun kappaleet liikkuvat toisiinsa nähden eri tavalla. Tämä moodi on siis antisymmetrinen.