

Sami Yrjänheikki

Vaimeneva värähtelijä (FYSP1020)

1 Vaimennetun värähtelijän teoriaa

1.1 Yleistä

Ideaalinen harmoninen värähtelijä muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi ja päinvastoin täysin häviöttä, toisin sanoen mekaaninen energia ei muutu eli $\Delta E_{mech} = 0$. Kuitenkin kaikissa todellisissa värähtelijöissä on dissipatiivisia voimia, jotka vähentävät värähtelijän mekaanista energiaa. Dissipatiivisia voimia ovat esimerkiksi ilmanvastus tai pintojen kitkavoima. Näiden voimien takia värähtelyn mekaaninen energia muuntuu termiseksi energiaksi ja värähtely hidastuu ja jossain vaiheessa käytännössä pysähtyy.

Auton iskunvaimentimet ovat esimerkki vaimennetun värähtelijän sovelluksesta [1]. Auton osuessa esimerkiksi kuoppaan auton korin liike on vaimenevaa värähtelyä. Tarkoituksena on vaimentaa värähtely mahdollisimman nopeasti ja matkustajille mukavasti.

1.2 Liiketytalo

Vaimennetussa värähtelyssä kokonaisvoima F_{tot} ei ole enää pelkkä Hooken lain mukainen jousivoima, vaan mukana on dissipatiivisia voimia. Vaimenevalle jouselle kokonaisvoima on tällöin $F_{tot} = -kx - D$, jossa D on dissipatiivisten voimien kokonaisvoima. Rajoittaudutaan matemaattisista syistä tarkastelemaan laminaarista ilmanvastusta, jolloin $D = bv$, jossa b on kappaleelle ominainen *vaimennuskerroin* ja v kappaleen nopeus fluidissa (tässä tapauksessa ilmassa).

Liiketytalo voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$-kx - bv = ma \quad (1.2.1)$$

josta saadaan, että

$$\frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

Saadun differentiaaliyhtälön (1.2.2) ratkaisu on muotoa

$$x(t) = Ae^{-bt/2m} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.2.3)$$

jossa kulmataajuus ω on

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (1.2.4)$$

[1]

Vaimenevia värähtelijöitä voidaan luokitella kulmataajuden lausekkeen perusteella. Kun $\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2}$, kyseessä on *alivaimennettu* värähtelijä. Jos taas $\frac{k}{m} < \frac{b^2}{4m^2}$, kyse on *ylivaimennetusta* värähtelijästä. Erikoistapaus $\frac{k}{m} = \frac{b^2}{4m^2}$ on taas nimeltään *kriittisesti vaimennettu* värähtelijä.

1.3 Liiketyhtälön alkuarvot

Oletetaan, että alkupaikka on x_0 ja alkunopeus $v_0 = 0$. Tällöin värähtelijän paikkafunktion täytyy toteuttaa ehdot

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

jossa $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{Ae^{-bt/2m}}{2m} [b \cos(\omega t + \phi_0) + 2m\omega \sin(\omega t + \phi_0)]$. Alkuehdot (1.3.1) saadaan nyt muotoon

$$\begin{cases} A \cos(\phi_0) = x_0 \\ -\frac{A}{2m} [b \cos(\phi_0) + 2m\omega \sin(\phi_0)] = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Jos halutaan ratkaista pelkkä ϕ_0 , pelkän alemman yhtälön ratkaisu riittää. Tällöin saadaan

$$b \cos(\phi_0) + 2m\omega \sin(\phi_0) = 0 \quad (1.3.3)$$

jonka ratkaisu on

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left(-\frac{b}{2m\omega} \right) \quad (1.3.4)$$

1.4 Esimerkki vaimennetusta värähtelijästä

Muodostetaan sellainen vaimennettu värähtelijä, jonka alkupaikka $x_0 = 0,20$ m, taajuus $f = 2,0$ Hz ja jonka mekaaninen energia on puoliintunut ajassa $t = 5$ s. Hyödynnetään numeerista mallinnusta parametrien (massa m , jousivakio k ja vaimennuskerroin b) etsimiseen.

Numeerinen mallinnusohjelma laskee lausekkeen $\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$ arvon. Lisätään koodiin rivi, joka laskee värähtelytaajuuden kaavan $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ mukaisesti:

```
tmp = k/mass - b**2/(4*mass**2)
print('f = ', tmp**(0.5)/(2*np.pi)) # uusi rivi
```

Ohjelmalla on nyt helppo haarukoida parametreille arvot. Tällaiset parametrit ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned}
m &= 0,15 \text{ kg} \\
k &= 23,9 \text{ N/m} \\
b &= 0,02 \text{ kg/s}
\end{aligned}$$

Helpoin tapa muodostaa ylivaimennettu ja kriittisesti vaimennettu värähtelijä on kasvattaa vaimennuskertoimen b arvoa, sillä luokittelu riippuu kulmataajuuden (1.2.4) arvosta. Kun muut vakiot pidetään samoina, kriittiselle värähtelijälle tarvittu vaimennuskerroin on tällöin

$$b = 2\sqrt{km} \quad (1.4.1)$$

ja vastaavasti ylivaimennetulle täytyy olla

$$b > 2\sqrt{km} \quad (1.4.2)$$

Hyödyntäen näitä kaavoja, saadaan $b = 2\sqrt{(23,9 \text{ N/m}) \cdot (0,15 \text{ kg})} \approx 3,789 \text{ kg/s}$. Numeerinen malli luokittelee värähtelijän kriittisesti vaimennetuksi kuitenkin vasta paljon tarkemmalla arvolla, sillä ohjelma luokittelee värähtelijän kriittisesti vaimennetuksi jos ω on tasan nolla, mikä vaatii niin suuren tarkkuuden, että liukuluvun tarkkuus ylittyy. Tarkemman syyn perustelu ei kuitenkaan liity värähtelijöihin, joten tyydytään hyväksymään, että värähtelijä on kriittisesti vaimennettu, kun $b = 3,786\,819\,245\,752\,297\,588\,8 \text{ kg/s}$.

Ylivaimennettu värähtelijä saadaan, kun valitaan kriittistä b :n arvoa suurempi arvo, kuten $b = 4$.

Kriittisesti vaimennettu ja ylivaimennettu värähtely ei käytännössä ehdi värähtelemään ollenkaan. Kun värähtelijä palautuu tasapainoasemaansa lähtöpaikasta x_0 , dissipatiiviset voimat tekevät työtä niin nopeasti, että tasapainoaseman saavutettua mekaaninen energia on nolla eikä seuraava värähdystä tapahdu.

Tehdään vielä yhteenveto parametreista ja tuloksista alla olevaan tauluk-

koon. Taulukon parametrit ovat värähtelijän lähtöpaikka x_0 , massa m , jousivakio k ja vaimennuskerroin b . Tuloksina ovat värähtelijän luokka, taajuus f ja värähtelyenergian puoliintumisaika $T_{1/2}$. Ylivaimennetun värähtelijän taajuus on kompleksiluku, joten sille ei ole annettu numeroarvoa vaan symboli \mathbb{C} .

Taulukko 1: Numeerisen mallinnuksen parametrit ja tulokset

Luokka	x_0 (m)	m (kg)	k (N/m)	b (kg/s)	f (Hz)	$T_{1/2}$ (s)
Alivaimennettu	0.2	0.15	23.9	0.02	2.0	5.0
Kriittisesti vaimennettu	0.2	0.15	23.9	3.7868192457522975888	0.0	0.1
Ylivaimennettu	0.2	0.15	23.9	4.0	\mathbb{C}	0.1

1.5 Mekaaninen energia alivaimennetulla värähtelijällä

Tutkitaan mekaanista energiaa alivaimennetulla värähtelijällä. Mekaaninen energia on värähtelijälle tällöin

$$E_{mech} \equiv E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.5.1)$$

Mekaanisen energian muutos ajan suhteen on silloin

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} \quad (1.5.2)$$

Kinematiikasta tiedetään, että $\frac{dv}{dt} = a$ ja $\frac{dx}{dt} = v$. Mekaanisen energian muutosnopeus on siis

$$\frac{dE}{dt} = v(ma + kx) \quad (1.5.3)$$

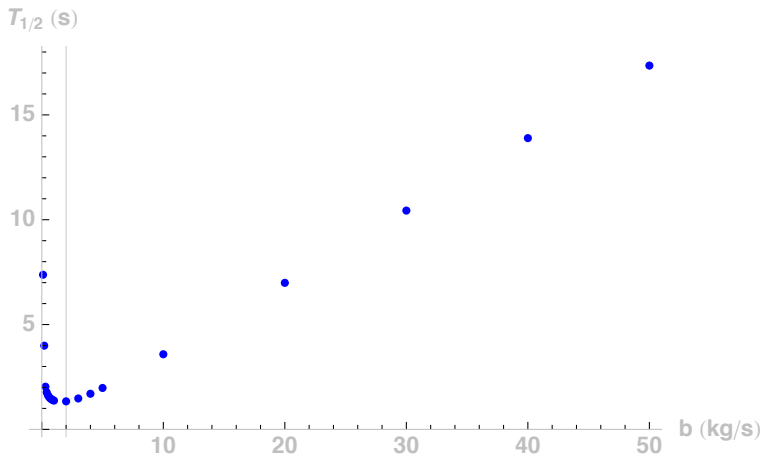
Yhtälöstä (1.2.1) tiedetään, että $ma + kx = -bv$, jolloin

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \quad (1.5.4)$$

Havaitaan, että koska $\frac{dE}{dt} \leq 0 \forall t \geq 0$, mekaaninen energia pienenee koko ajan. Muutosnopeus riippuu kuitenkin värähtelijän nopeudesta v . Ääriasenoissa värähtelijän nopeus $v = 0$, joten tällöin myös mekaanisen energian muutosnopeus $\frac{dE}{dt} = 0$. Mekaaninen energia ei siis pienene tarkalleen eksponentiaalisesti ajan funktiona.

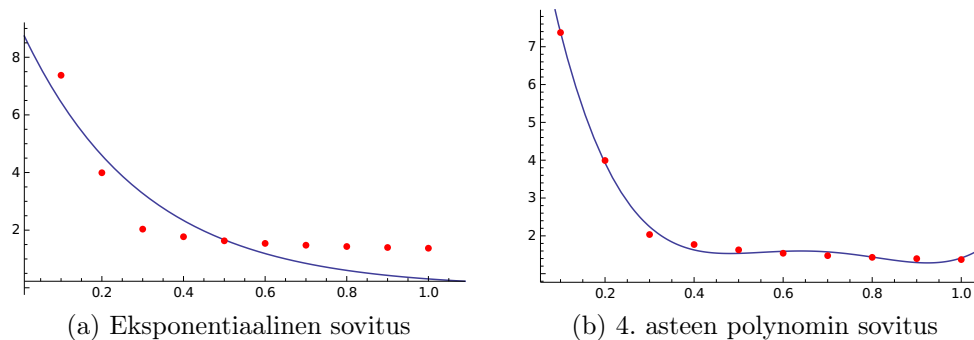
Havaitaan myös, että energian muutosnopeus riippuu lineaarisesti vaimennuskertoimesta b ja neliöllisesti nopeudesta v . Nopeus v riippuu kuitenkin myös vaimennuskertoimen arvosta, joten todellinen riippuvuus ei ole lineaarista. Tutkitaan tätä riippuvuutta tarkemmin numeerisesti. Asetetaan parametrit $m = 1 \text{ kg}$ ja $k = 1 \text{ N/m}$ ja aloitetaan b -parametrin testaaminen arvosta $b = 0,1 \text{ kg/s}$ ja kirjataan energian puoliintumisajat $T_{1/2}$.

Kun tulokset esitetään graafisesti (kuva 1), nähdään, että tietyn rajan (kuvasssa harmaa pystyviiva) jälkeen riippuvuus on lineaarista, mutta sitä ennen ei. Tämä tietty raja on kohta, jossa värähtelijä on kriittisesti vaimennettu. Ennen tätä pistettä värähtely on alivaimennettua ja sen jälkeen ylivaimennettua.



Kuva 1: Energian puoliintumisajan $T_{1/2}$ riippuvuus vaimennuskertoimesta b

Kun alivaimennettuun osuuteen datasta ($0,0 \text{ kg/s} \leq b \leq 2,0 \text{ kg/s}$) yritetään sovittaa käyrä, havaitaan, että 4. asteen polynomi on melko hyvä sovitus, kun taas eksponentiaalinen käyrä ei ole kovinkaan hyvä kuvan 2 perusteella.



Kuva 2: Käyrien sovitus

Voidaan siis todeta, että energian puoliintumisaika $T_{1/2}$ riippuu vaimennuskertoimesta b lineaarisesti, kun kyseessä on ylivaimennettu värähtelijä ja ei-lineaarisesti, kun kyseessä on alivaimennettu värähtelijä.

2 Numeerinen mallintaminen

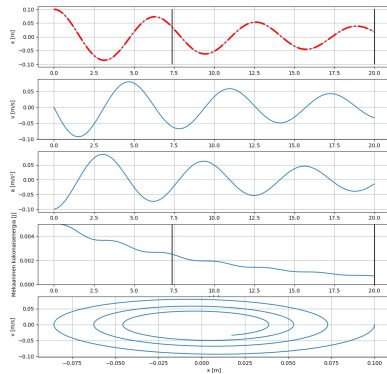
Numeerinen mallinnusohjelma laskee kappaleen kiihtyvyyden riveillä 51-53:

```
def acceleration( t, x, v ):
    Ftot = -k*x - b*v
    return Ftot/mass
```

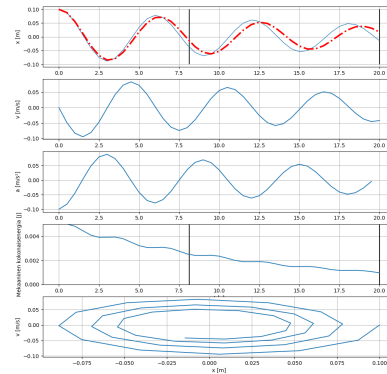
Koodista nähdään, että funktio laskee ensin kokonaisvoiman kaavalla $F_{tot} = -kx - bv$, jonka jälkeen funktio jakaa saadun tuloksen massalla. Laskutoimitus on täysin sama kuin vaimenevan värähtelijän liikeyhtälö (1.2.1).

Numeerisen integroinnin tarkkuus huononee, kun mallinnuksen aika-askel kasvaa. Tämä nähdään siinä, että $x(t)$ -kuvaaja alkaa erkanemaan teoreettisesta kuvaajasta. Erkaneminen tapahtuu testien perusteella niin, että numeerisesti laskettu paikka on teoreettista edellä, jonka seurauksena esimerkiksi

aika, jolla mekaaninen energia on puoliintunut, siirtyy kauemmas. Myös kaikki kuvaajat muuttuvat rosoisimmaksi aika-askelen kasvaessa. Näitä voidaan havainnollistaa kahdella tuloksella, joissa on käytetty erilaisia aika-askeleita.



(a) Aika-askel 0,005 s



(b) Aika-askel 0,5 s

3 Oppimisen tarkastelu

Heti alkuun on sanottava, että tämä projektityö oli mukavampi ja innostavampi kuin aluksi kuvittelin. Oli hauska päästä soveltamaan opittuja taitoja jo hieman demoja suuremmassa mittakaavassa. Tehtävä itsessään ei kuitenkaan ollut liian vaikea, vaan tarjosi sopivaa haastetta.

Opin tässä työssä ensinnäkin paljon raportin kirjoittamisesta, datan käsittelystä sekä myös hieman lisää kuvaajien piirtämisestä ja käyräsovituksista. Opin myös numeeristen menetelmien käytöstä paljon, sillä niitä ei tähän mennessä ole paljoakaan tullut konkreettisesti vastaan. Oli myös mielenkiintoista huomata, miten $(b, T_{1/2})$ -kuvaajan (kuva 1) käyttäytyminen riippuu, onko värähtelijä ali- vai ylivaimennettu. Nämä luokat ovat siis jotain muutakin kuin mielivaltaisesti valittuja nimikkeitä.

Koin, että perusymmärrys ohjelmoinnista oli etu tässä työssä, kuten myös yksinkertainen datan käsitteleminen. Kuitenkaan yksikään näistä taidoista ei ollut varsinaisessa avainasemassa, mikä on ihan hyvä asia.

Viitteet

- [1] Randall D. Knight, *Physics for Scientists and Engineers - 4th Global Edition*, Pearson 2017