

Sami Antero Yrjänheikki

sami.a.yrjanheikki@student.jyu.fi

14.5.1999

FYSP1082/3 Vaihtovirtakomponentit

Työ mitattu: 17.5.2019

Ohjaava assistentti: Artturi Pensasmaa

Työ jätetty tarkastettavaksi:

Abstract:

In this laboratory exercise the capacitance of a capacitor was measured to be $C = (1.080 \pm 0.007) \mu\text{F}$. The inductance of an inductor was determined to be $L = (285 \pm 2) \text{mH}$. Resonant frequency of a LCR series circuit was measured and calculated to be $f_0 = (307 \pm 3) \text{Hz}$. In addition, the values for capacitive and inductive reactances are presented as well as the voltage across components and phase shift in an LCR circuit.

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan vaihtovirtapiirien peruskomponentteja eli vastuksia, kondensaattoreita ja keloja. Työn alussa selvitetään kokeellisesti kondensaattorin kapasitanssi C sekä kelan sisäinen resistanssi R_L ja sen induktanssi L . Lisäksi työssä tutkitaan, miten LCR-piirin komponenttien jännitehäviöt summautuvat koko piirin jännitehäviöksi sekä etsitään LCR-piirin resonanssitaajuus oskilloskoopin avulla.

Vaihtovirtapiireissä vastus toimii aivan kuten tasavirtapiirissä, mutta kondensaattori ja kela saavat uusia ominaisuuksia. Tasavirtapiirissä kondensaattorin läpi ei kulje virtaa (siirtymisvirtoja lukuunottamatta) ja kela käyttäytyy kuten vastus, jälleen siirtymisvirtoja lukuunottamatta. Vaihtovirtapiirissä kuitenkin kondensaattori varautuu ja purkautuu virran ja jännitteen suunnan muuttuessa ja kelassa muuttuva virta indusoi magneettikentän. Kun nämä komponentit kytketään sarjaan LCR-piiriin, saadaan aikaan värähtelypiiri. RC-piirejä voidaan taas käyttää esimerkiksi taajuussuotimina. [1]

Vaihtovirralla ja -jännitteellä käytetään usein niin kutsuttuja RMS (root mean square) -arvoja. Yleismittarit ovat kalibroitu näyttämään RMS-arvoja, joten kaikki tässä työssä mitatut vaihtovirrat ja -jännitteet ovat niiden RMS-arvoja.

2 Teoreettiset lähtökohdat

2.1 Reaktanssi ja impedanssi

Vaihtovirtapiireille voidaan johtaa niin kutsuttu yleistetty Ohmin laki

$$V = ZI, \tag{1}$$

missä Z on kompleksinen *impedanssi*. Impedanssi voidaan kirjoittaa muotoon

$$Z = R + jX, \quad (2)$$

missä R on reaalinen resistanssi ja X on imaginaarinen *reaktanssi*. [3]

Erityisesti kondensaattorin impedanssille pätee

$$Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (3)$$

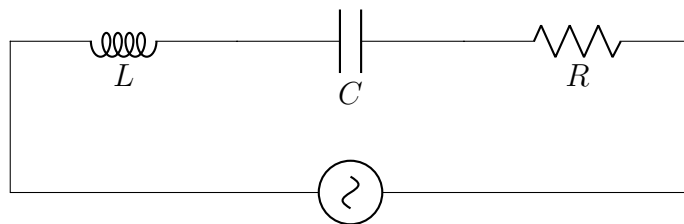
missä X_C on *kapasitiivinen reaktanssi*, ω vaihtovirtapiirin kulmataajuus ja C kondensaattorin kapasitanssi. Vastaavasti kelalle pätee

$$Z_L = X_L = \omega L, \quad (4)$$

missä X_L on *induktiivinen reaktanssi*, ω jälleen kulmataajuus ja L kelan induktanssi. [1]

2.2 LCR-piiri

Oletetaan, että kuvan 1 mukaisen piirin jännitelähde tuottaa sinimuotoista jännitettä amplitudilla V_0 eli jännitelähteelle pätee $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.



Kuva 1: LCR-vaihtovirtapiiri.

Kirchoffin 2. lain nojalla

$$V_L + V_R + V_C = V_0 \cos(\omega t), \quad (5)$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t) \quad (6)$$

[1].

Eulerin lauseen perusteella $V_0 \cos(\omega t) = V_0 e^{j\omega t}$, missä $j^2 = -1$. Nyt yhtälö (6) saadaan muotoon

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 e^{j\omega t}. \quad (7)$$

Yhtälön (7) ratkaisuksi saadaan

$$Q(t) = Q_0 e^{j\omega t}, \quad (8)$$

missä

$$Q_0 = \frac{V_0}{-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}}. \quad (9)$$

Virran määritelmästä saadaan yhtälön (8) avulla

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_0 e^{j\omega t}, \quad (10)$$

missä

$$I_0 = j\omega Q_0. \quad (11)$$

Yleistetyn Ohmin lain mukaan $V_0 = ZI_0$, joten yhtälöiden (9) ja (11) avulla saadaan, että

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (12)$$

Yhtälö (12) voidaan kirjoittaa yhtälöiden (3) ja (4) avulla muotoon

$$Z = R + j(X_L - X_C). \quad (13)$$

Impedanssi Z on kompleksinen suure, joten sen fyysikaalisen vaikutuksen laske-
miseksi täytyy laskea sen amplitudi eli

$$|Z| = |R + jX| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (14)$$

[3].

LCR-piiri on sarjaan kytketty, joten virta jokaisen komponentin läpi on sama I . Tällöin yleisen Ohmin lain ja yhtälön (14) nojalla saadaan

$$\frac{V}{I} = \sqrt{\left(\frac{V_R}{I}\right)^2 + \left(\frac{V_L}{I} - \frac{V_C}{I}\right)^2}, \quad (15)$$

josta virta I supistamalla saadaan

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}. \quad (16)$$

LCR-piirin vaihe-ero saadaan suoraviivaisesti kompleksisen impedanssin Z vaihe-erosta:

$$\phi = \arg Z = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (17)$$

Yhtälöstä (17) nähdään myös, että vastuksen, jolle $X_L = X_C = 0$, virran ja jännitteen vaihe-ero on

$$\phi_R = \arctan(0/R) = 0, \quad (18)$$

kondensaattorille, jolle $X_L = R = 0$, puolestaan

$$\phi_C = \lim_{R \rightarrow 0^+} \arctan\left(-\frac{X_C}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (19)$$

ja kelalle, jolle $X_C = R = 0$, vastaavasti

$$\phi_L = \lim_{R \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

LCR-piirissä kulkevan virran amplitudi saadaan yleisestä Ohmin laista siten, että

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (21)$$

[1].

2.3 Resonanssitaajuus

Resonanssitaajuudella piirissä kulkeva virta saavuttaa maksimiarvonsa. Tämä maksimi saavutetaan silloin, kun impedanssi Z saavuttaa minimiarvonsa. Vastus R ei riipu kulmataajuudesta ω , joten impedanssi on minimissään, kun $X_L = X_C$, jolloin

$$|Z| = \sqrt{R^2} = R. \quad (22)$$

Tämä tapahtuu silloin, kun

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (23)$$

eli

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0. \quad (24)$$

Taajuutta ω_0 kutsutaan *resonanssitaajuudeksi*. [1]

2.4 Virhearviointi

Lasketaan kondensaattorin kapasitanssille C virhe yhtälön (3) ja yleisen virheen etenemislain avulla. Oletetaan, että kulmataajuudella ω ei ole virhettä. Tällöin osittaisderivaattojen avulla

$$\begin{aligned} \delta C &= \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial \omega} \underbrace{\delta \omega}_{=0}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial X_C} \delta X_C\right)^2} \\ &= \frac{\delta X_C}{\omega X_C^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Vastaavasti yhtälöstä (4) saadaan kelan induktanssille virhe osittaisderivaattoilla:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \underbrace{\delta \omega}_{=0}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial X_L} \delta X_L\right)^2} \\ &= \frac{\delta X_L}{\omega}. \end{aligned} \quad (26)$$

Resonanssitaajuudelle saadaan vastaavasti yhtälön (24) avulla

$$\begin{aligned}\delta\omega_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial C}\delta C\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial L}\delta L\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\delta L)^2 C^2 + (\delta C)^2 L^2}{L^3 C^3}}.\end{aligned}\tag{27}$$

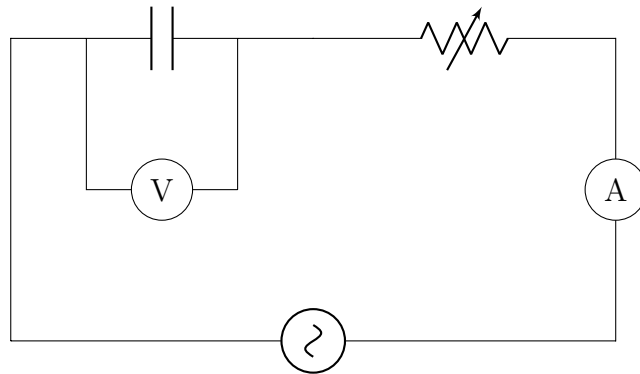
[2]

3 Mittauslaitteisto ja kokeelliset menetelmät

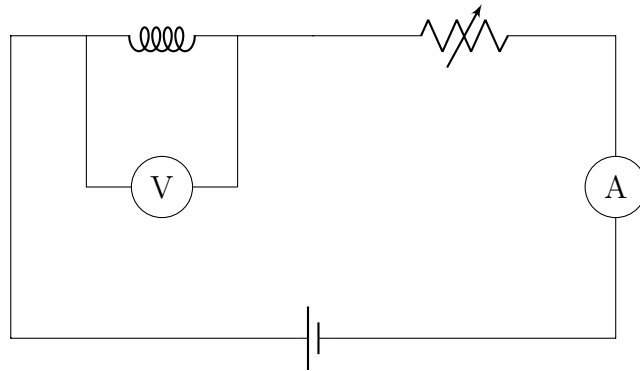
Tasa- ja vaihtojännitteen ja -virran mittaamiseen käytettiin Finest 703 -yleismittaria. Kuvan 6 piirin resonanssitaajuus etsittiin Hameg HM303-6 -oskilloskoopin avulla. Vaihtovirtalähteenä käytettiin GwInstek GFG-8217A -signaaligeneraattoria sinimuotoisella taajuusasetuksella. LCR-piirin komponenttien arvot mitattiin käyttäen Megger B131 -LCR-mittaria. Lisäksi käytössä oli 1,5 V paristo, säätövastuksia (50 k Ω , 0,1 k Ω), kela (200 mH), kondensaattori (1,2 μ F) sekä vastuksia (220 Ω , 82 k Ω). Suluissa ilmoitetut arvot ovat komponentteihin merkittävät arvoja, eivätkä ne siis ole mitattuja arvoja.

Kondensaattorin kapasitanssin C selvittämiseksi kondensaattori kytkettiin sarjaan virtalähteen, säätövastuksen (50 k Ω) ja virtamittarin kanssa kuvan 2 mukaisesti. Lisäksi kondensaattorin päiden välinen jännite mitattiin yleismittarilla. Virtalähteenä käytettiin signaaligeneraattoria laitteen ilmoittamalla taajuudella $f = 108,5$ Hz. Signaaligeneraattorin tuottaman jännitteen amplitudi pidettiin vakiona mittauksen ajan ja piirissä kulkevaa virtaa säädeltiin säätövastuksen avulla.

Kelan sisäisen resistanssin R_L selvittämiseksi kela kytkettiin sarjaan pariston, säätövastuksen (0,1 k Ω) ja virtamittarin kanssa kuvan 3 mukaisesti. Kelan päiden välinen jännite mitattiin yleismittarilla. Piirissä kulkevan virran



Kuva 2: Tehtävässä 1 käytetty virtapiiri kondensaattorin kapasitanssin C määrittämiseen.

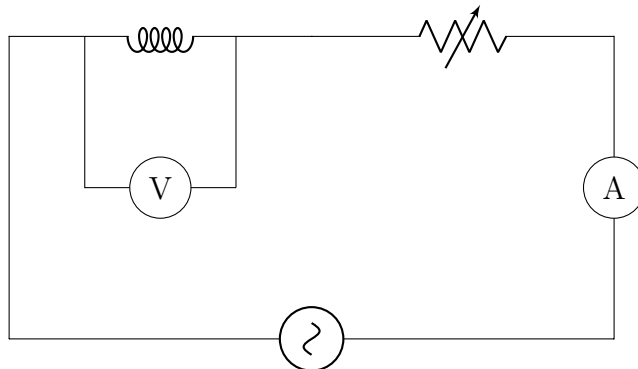


Kuva 3: Tehtävässä 2 käytetty virtapiiri kelan sisäisen resistanssin R_L määrittämiseen.

määrää säädeltiin säätövastuksen avulla.

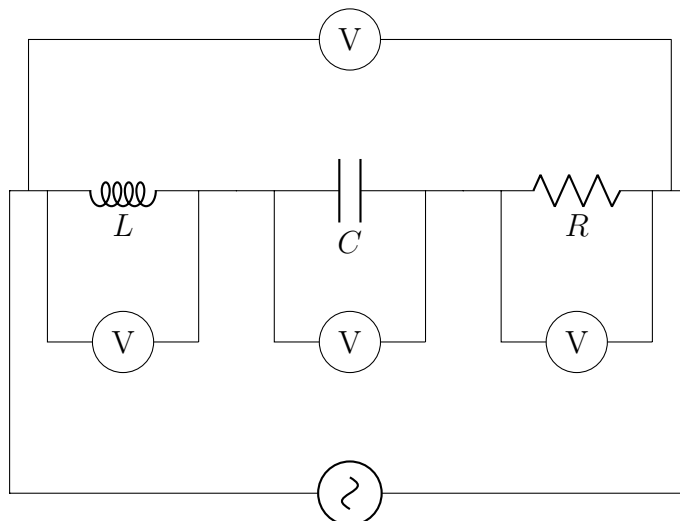
Kelan induktanssin L selvittämiseksi kela kytkettiin kytkentää 3 vastaavaan kytkentään 4, jossa pariston sijaan käytettiin virtalähteenä signaaligeneraattoria, jonka taajuus oli $f = 108,3 \text{ Hz}$.

LCR-piirin jännitehäviön selvittämiseksi vastus, kondensaattori ja kela kytkettiin sarjaan signaaligeneraattorin kanssa kuvan 5 mukaisesti siten, että jännitehäviö jokaisen komponentin yli sekä koko piirin yli voidaan mitata yleismittareilla. Mittaus toteutettiin käytännössä siten, että jännitehäviöt komponenteittain mitattiin samanaikaisesti kolmella yleismittarilla, jonka jälkeen koko piirin jännitehäviö mitattiin yhdellä yleismittarilla. Tässä



Kuva 4: Tehtävässä 3 käytetty virtapiiri kelan induktanssin L määrittämiseen.

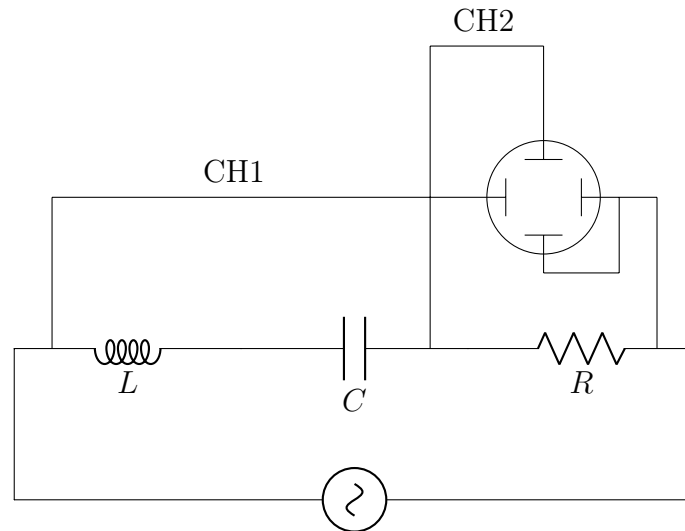
vaiheessa mittausta LCR-piirin komponenttien arvot mitattiin myös LCR-mittarilla, jotta tässä työssä laskettavia arvoja voidaan vertailla.



Kuva 5: Tehtävässä 4 käytetty virtapiiri kelan induktanssin L määrittämiseen.

Saman LCR-piirin resonanssitaajuuden selvittämiseksi piiri kytkettiin oskilloskooppiin kuvan 6 mukaisesti. Oskilloskooppi asetettiin XY-moodiin. Kun signaaligeneraattorin tuottaman jännitteen taajuus ei vastaa piirin resonanssitaajuutta, oskilloskoopin kuvaruudulla näkyy hieman vääristynyt ellipsi. Resonanssitaajuus löydetään, kun signaaligeneraattorin taajuutta säädetään, kunnes oskilloskoopilla näkyy (edelleen hieman vääristynyt) viiva ellipsin si-

jaan.



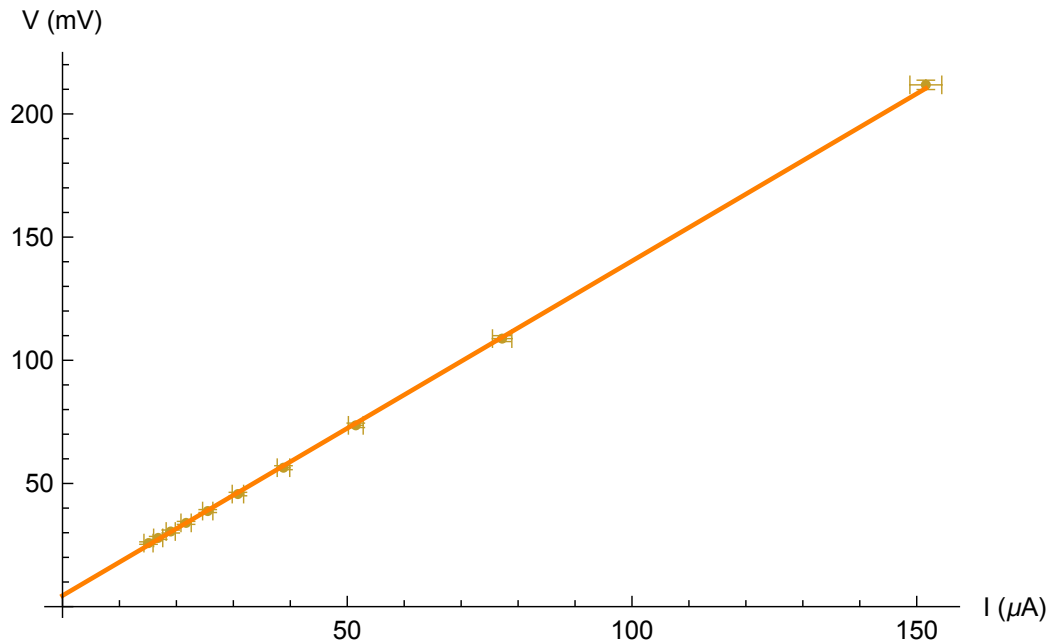
Kuva 6: Tehtävässä 5 käytetty virtapiiri LCR-piirin resonanssitaajuuden selvittämiseen.

4 Havainnot ja laskut

Kuvan 2 mukaisella kytkennällä mitattiin virran ja jännitteen arvoiksi taulukon 1 mukaiset arvot. Kun nämä arvot asetetaan (I, V) -koordinaatistoon ja pisteisiin sovitetaan PNS-suora, saadaan kuvan 7 mukainen kuvaaja. Kun sovitus tehdään yhtälöön $V = X_C R + c_1$, saadaan PNS-sovituksesta parametri $X_C = (1,3582 \pm 0,0079) \text{ mV}/\mu\text{A}$. Tällöin yhtälön (3) perusteella

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega X_C} \\ &= (2\pi \cdot 108,5 \text{ Hz} \cdot 1,3582 \text{ mV}/\mu\text{A})^{-1} \\ &\approx 1,080 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Virheeksi saadaan yhtälön (25) avulla



Kuva 7: Piirin 2 mukaisen kytkennän mitatut jännitteen ja virran RMS-arvot.

$$\begin{aligned}
 \delta C &= \frac{\delta X_C}{\omega X_C^2} \\
 &= \frac{0,0079 \text{ mV}/\mu\text{A}}{2\pi \cdot 108,5 \text{ Hz} \cdot (1,3582 \text{ mV}/\mu\text{A})^2} \\
 &\approx 0,0063 \mu\text{F}.
 \end{aligned}$$

Kondensaattorin kapasitanssiksi saadaan siis $C = (1,080 \pm 0,007) \mu\text{F}$.

Kelan sisäinen resistanssi ¹ voidaan ajatella olevan piirin 3 säätövastuksen kanssa sarjaan kytketty vastus R_L . Tällöin Ohmin lain mukaan kelan yli pätee $V = IR_L$. Kun taulukon 2 pisteet piirretään (I, V) -koordinaatistoon ja niihin sovitetaan suora $V(I) = IR_L$, saadaan kuvan 8 mukainen kuvaaja ja suorasovitus, jolle $R_L = (163,77 \pm 0,30) \text{ m}\Omega$. Sisäisen resistanssin virhe

¹Alkuperäisen mittauksen antama arvo sisäiselle resistanssille $R_L \approx 132 \Omega$ oli aivan suuri, joten mittaus tehtiin uudestaan. Todennäköinen syy mittausrvirheelle oli virheellinen kytkentä, jossa mitattiinkin koko piirin jännitettä eikä pelkästään kelan jännitettä.

Taulukko 1: Piirin 2 mukaisen kytkennän mitatut virran ja jännitteen arvot.

I (μA)	V (mV)
$15,1 \pm 0,8$	$25,8 \pm 0,5$
$16,8 \pm 0,8$	$27,9 \pm 0,6$
$19,0 \pm 0,8$	$30,5 \pm 0,6$
$21,7 \pm 0,9$	$34,0 \pm 0,6$
$25,5 \pm 0,9$	$38,8 \pm 0,6$
$30,8 \pm 1,0$	$45,7 \pm 0,7$
$38,8 \pm 1,1$	$56,4 \pm 0,8$
$51,5 \pm 1,3$	$73,6 \pm 0,9$
$77,2 \pm 1,7$	$108,8 \pm 1,2$
$151,6 \pm 2,8$	$211,8 \pm 1,9$

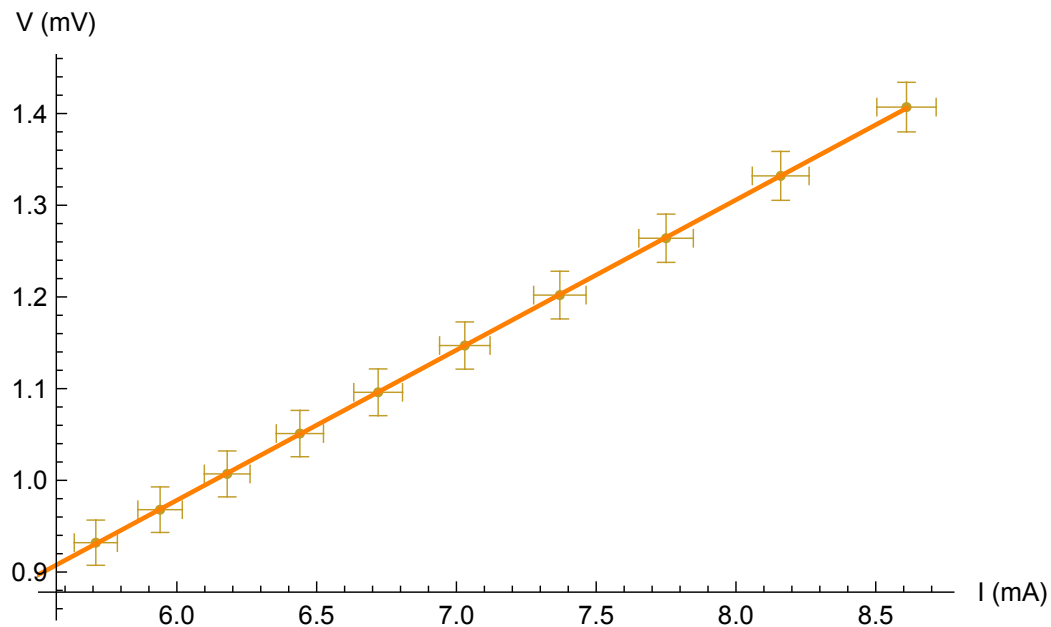
saadaan PNS-suorasovituksen virheestä.

Kuten kapasitanssin laskemisessa, kelan induktanssin selvittämistä varten piirretään taulukon 3 pisteet (I, V) -koordinaatistoon ja sovitetaan mittauspisteisiin suora $V = ZI$ PNS-sovituksella. Mittauspisteet suorasovituksineen on esitetty kuvassa 9.

Suorasovituksesta saadaan impedanssi $Z = (0,1939 \pm 0,0012) \text{ mV}/\mu\text{A}$. Impedanssille pätee tässä sarjaan kytketyssä tilanteessa $Z = R_L + X_L$, missä R_L on kelan sisäinen resistanssi. Tällöin yhtälön (4) avulla kelan induktanssiksi tulee

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{X_L}{\omega} - R_L \\
 &= \frac{0,1939 \text{ mV}/\mu\text{A} - 163,77 \text{ m}\Omega}{2\pi \cdot 108,3 \text{ Hz}} \\
 &\approx 284,8 \text{ mH}.
 \end{aligned}$$

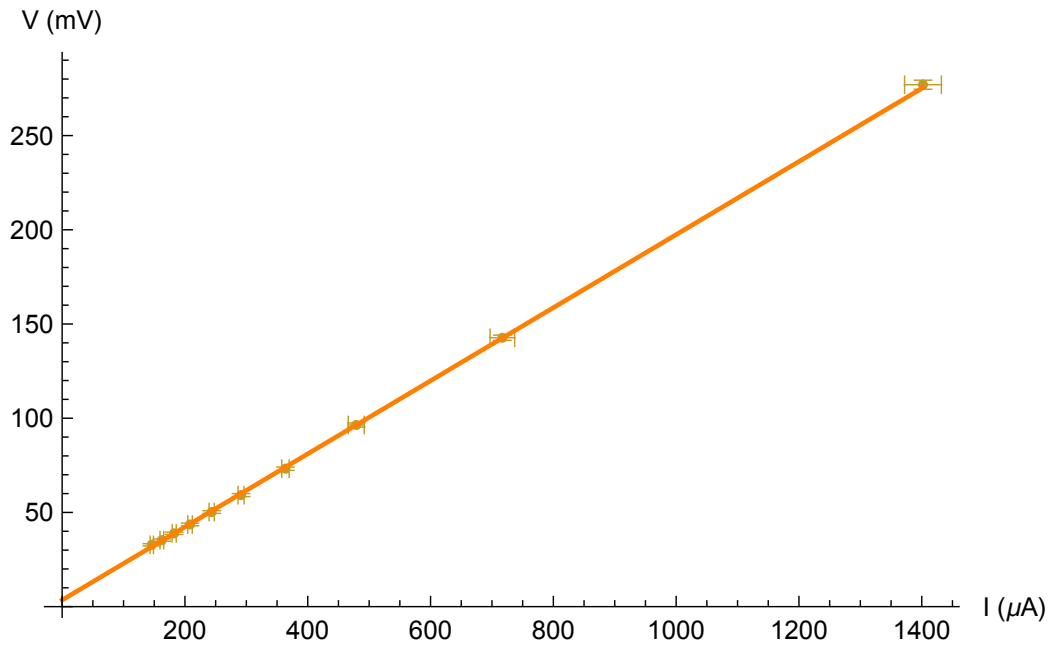
Virheeksi saadaan yhtälön (26) avulla



Kuva 8: Piirin 3 mukaisen kytkennän mitatut jännitteen ja virran arvot.

Taulukko 2: Piirin 3 mukaisen kytkennän mitatut virran ja jännitteen arvot.

I (mA)	V (mV)
$5,71 \pm 0,08$	$0,932 \pm 0,030$
$5,94 \pm 0,08$	$0,968 \pm 0,030$
$6,18 \pm 0,08$	$1,007 \pm 0,030$
$6,44 \pm 0,08$	$1,051 \pm 0,030$
$6,72 \pm 0,09$	$1,096 \pm 0,030$
$7,03 \pm 0,09$	$1,147 \pm 0,030$
$7,37 \pm 0,09$	$1,202 \pm 0,030$
$7,75 \pm 0,10$	$1,264 \pm 0,030$
$8,16 \pm 0,10$	$1,332 \pm 0,030$
$8,61 \pm 0,11$	$1,407 \pm 0,030$



Kuva 9: Piirin 4 mukaisen kytkennän mitatut jännitteen ja virran RMS-arvot.

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \frac{\delta X_L}{\omega} \\
 &= \frac{0,0012 \text{ mV}/\mu\text{A}}{2\pi \cdot 108,3 \text{ Hz}} \\
 &\approx 1,8 \text{ mH}.
 \end{aligned}$$

Kelan induktanssiksi saadaan siis $L = (285 \pm 2) \text{ mH}$.

Yleistetyn Ohmin lain nojalla $V \propto Z$ eli impedanssin kasvattaminen kasvattaa komponentin yli tapahtuvaa jännitehäviötä. Kondensaattorin impedanssille pätee yhtälön (3) mukaan $Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C}$. Kyseessä on (kulma)taajuuden suhteen vähenevä funktio, joten taajuuden kasvattaminen pienentää kondensaattorin jännitteen amplitudia. Vastaavasti yhtälön (4) mukaan kelan impedanssille pätee $Z_L = X_L = \omega L$, joka on (kulma)taajuuden suhteen kasvava funktio. Tällöin taajuuden kasvattaminen kasvattaa kelan jännitehäviön amplitudia.

Taulukko 3: Piirin 4 mukaisen kytkennän mitatut virran ja jännitteen arvot.

I (μA)	V (mV)
$146,0 \pm 2,7$	$32,8 \pm 0,6$
$162,4 \pm 3,0$	$35,3 \pm 0,6$
$182,5 \pm 3,3$	$38,9 \pm 0,6$
$208,3 \pm 3,7$	$43,6 \pm 0,7$
$243,5 \pm 4,2$	$50,2 \pm 0,7$
$291,4 \pm 4,9$	$59,2 \pm 0,8$
$363,7 \pm 6,0$	$73,2 \pm 0,9$
479 ± 13	$96,4 \pm 1,1$
717 ± 20	$142,7 \pm 1,4$
1402 ± 30	$277,0 \pm 2,4$

Kuvan 5 mukaisessa LCR-piirin jännitemittauksessa saatiin seuraavat tulokset:

$$\begin{aligned}
 V_L &= (6,86 \pm 0,09) \text{ V} && \text{(kelan jännitehäviö)} \\
 V_C &= (9,14 \pm 0,10) \text{ V} && \text{(kondensaattorin jännitehäviö)} \\
 V_R &= (3,377 \pm 0,060) \text{ V} && \text{(vastuksen jännitehäviö)} \\
 V &= (6,61 \pm 0,08) \text{ V} && \text{(koko piirin jännitehäviö)}.
 \end{aligned}$$

Näistä tuloksista voidaan laskea suora jännitehäviöiden summa siten, että

$$\begin{aligned}
 V &= V_L + V_C + V_R \\
 &= (6,86 \pm 0,09) \text{ V} + (9,14 \pm 0,10) \text{ V} + (3,377 \pm 0,060) \text{ V} \\
 &\approx (19,4 \pm 0,3) \text{ V}.
 \end{aligned}$$

Laskettu tulos eroaa selvästi mitatusta koko piirin jännitehäviöstä, mikä on odotettua, sillä LCR-piirissä kaikki jännitteet ovat eri vaiheessa. Todellinen jännite saadaan laskemalla jännitteet neliöllisesti yhtälön (16) mukaisesti:

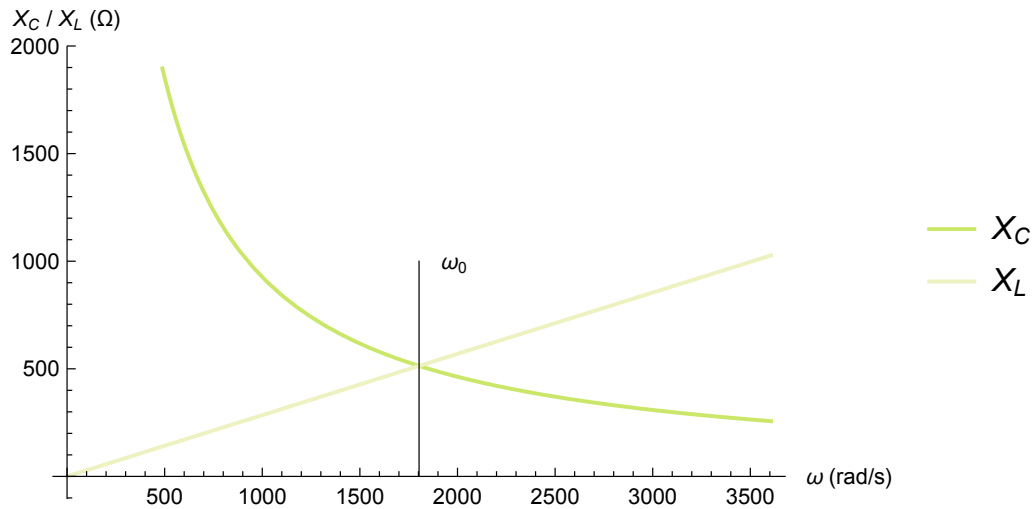
$$\begin{aligned}
V &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \\
&= \sqrt{((3,377 \pm 0,060) \text{ V})^2 + ((6,86 \pm 0,09) \text{ V} - (9,14 \pm 0,10) \text{ V})^2} \\
&\approx (4,07 \pm 0,09) \text{ V}.
\end{aligned}$$

Kuitenkin myös neliöllisesti laskettu jännitehäviö eroaa merkittävästi mitatusta arvosta. Yksi selitys tälle on se, että kelan sisäistä resistanssia ei huomioida tässä laskussa. Todellisuudessa piirin resistanssi R on suurempi kuin pelkän vastuksen resistanssi, mikä kasvattaa jännitehäviötä.

Kun piirin taajuus on resonanssitaajuutta pienempi, eli $\omega < \omega_0$, kapasitiivinen reaktanssi on suurempi sen vähenevyyden perusteella. Kuva 10 havainnollistaa tilannetta esimerkkiarvoilla. Yhtälöstä (17) nähdään kuvan 10 avulla, että kun $\omega < \omega_0$, vaihe-ero $\phi < 0$. Vaihe-ero kuvaa jännitteen vaihe-eroa virtaan nähden, joten negatiivinen vaihe-ero kertoo, että jännite on virtaa jäljessä. Tälle LCR-piirille voidaan laskea konkreettinen vaihe-ero käyttämällä laskettuja kapasitanssin ja induktanssin arvoja sekä mitattuja arvoja $f = 252,8 \text{ Hz}$ ja $R = 222 \Omega$. Tässä laskussa jätetään virhearviointi huomioimatta, sillä tarkkaa vaihe-eron arvoa ei kysytä. Yhtälön (17) avulla saadaan siis $\phi = -0,532 \text{ rad} \approx -30,5^\circ$.

LCR-piirin resonanssitaajuudeksi selvitettiin kokeellisesti oskilloskoopin avulla $f_0 = (306 \pm 2) \text{ Hz}$. Resonanssitaajuuden virhe on arvioitu tarkkailemalla millä taajuusalueella kuva oskilloskoopilla näyttää vielä (vääristyneeltä) suoralta. Kun piirin resonanssitaajuus lasketaan yhtälön (24) avulla, saadaan

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{284,8 \text{ mH} \cdot 1,080 \text{ }\mu\text{F}}} \\
&\approx 287,0 \text{ Hz}.
\end{aligned}$$



Kuva 10: Kapasitiivisen ja induktiivisen reaktanssin kuvaajat yhtälöiden (3) ja (4) mukaisesti arvoilla $C = 1,080\,01\ \mu\text{F}$ ja $L = 284,8\ \text{mH}$.

Virheeksi tulee kaavan (27) avulla

$$\delta f_0 = \frac{\delta \omega_0}{2\pi} \approx 1,4\ \text{Hz}.$$

Resonanssitaajuuden teoreettinen arvo on siis $f_0 = (287 \pm 2)\ \text{Hz}$. Jos sama lasku suoritetaan LCR-mittarilla mitattujen kapasitanssin ja induktanssin avulla, saadaan resonanssitaajuudeksi $f_0 = (307 \pm 3)\ \text{Hz}$.

5 Johtopäätökset

Kondensaattorin kapasitiiviseksi reaktanssiksi mitattiin $X_C = (1358 \pm 8)\ \Omega$. Kapasitanssiksi laskettiin $C = (1,080 \pm 0,007)\ \mu\text{F}$. Tulos ei aivan sisälly virherajoineen LCR-mittarilla mitatun kapasitanssin arvoon $C = (1,053 \pm 0,011)\ \mu\text{F}$, mutta tulos on kuitenkin melko lähellä mitattua arvoa.

Kelan sisäiseksi resistanssiksi määritettiin $R_L = (163,8 \pm 0,3)\ \text{m}\Omega$ ja sen impedanssiksi $Z_L = (193,9 \pm 1,2)\ \Omega$. Induktanssiksi laskettiin tästä $L =$

(285 ± 2) mH. Tämäkään arvo ei ole yhtenevä LCR-mittarilla mitatun arvon $L = (255,8 \pm 4,0)$ mH kanssa, mutta kuitenkin samaa suuruusluokkaa.

LCR-piirin jännitehäviöiksi mitattiin komponentteittain ja koko piirin yli

$$\begin{aligned} V_L &= (6,86 \pm 0,09) \text{ V} && \text{(kelan jännitehäviö)} \\ V_C &= (9,14 \pm 0,10) \text{ V} && \text{(kondensaattorin jännitehäviö)} \\ V_R &= (3,377 \pm 0,060) \text{ V} && \text{(vastuksen jännitehäviö)} \\ V &= (6,61 \pm 0,08) \text{ V} && \text{(koko piirin jännitehäviö).} \end{aligned}$$

Näistä voidaan laskea jännitehäviöiden suora $V = (19,4 \pm 0,3) \text{ V}$ ja neliölinen $V = (4,07 \pm 0,09) \text{ V}$ summa. Kumpikaan arvoista ei vastaa mitattua koko piirin jännitehäviötä. Havainnot ja laskut -osiossa selitettyjen syiden vuoksi. LCR-piirin vaihe-eroksi laskettiin $\phi = -30,5^\circ$.

LCR-piirin resonanssitaajuudeksi selvitettiin oskilloskoopilla $f_0 = (306 \pm 2) \text{ Hz}$. Kokeellisesti selvitettyjen kapasitanssin ja induktanssin arvoilla piirin resonanssitaajuudeksi laskettiin $f_0 = (287 \pm 2) \text{ Hz}$. Jälleen arvot eivät täysin yhdy, mikä on odotettua, sillä kapasitanssin ja induktanssin mitatuissa arvoissa todettiin jo olevan heittoa. Jos resonanssitaajuus lasketaan LCR-mittarilla mitatuilla arvoilla, saadaan $f_0 = (307 \pm 3) \text{ Hz}$, mikä sisältyy virherajoiheen kokeellisesti selvitettyyn arvoon.

Mittausten mahdollisia virhelähteitä ovat mittalaitteiden mittausrvirheet, lukuvirheet sekä ulkopuoliset häiriötekijät. Vaihtovirtapiirit ovat alttiita ulkoisille sähkö- ja magneettikentille, joiden läsnäolo saattaa indusoida virtoja piiriin. Myös lämpötila vaikuttaa resistanssin arvoon, joten komponenttien resistanssien arvot luultavasti kasvoivat hieman mittauksen aikana. Lisäksi johtimista aiheutuu ylimääräistä resistanssia, joka vaikuttaa etenkin kelan sisäisen resistanssin ja LCR-piirin jännitehäviöiden mittauksiin. Toisaalta signaaligeneraattorin tuottaman jännitteen taajuuden arvo ei ole virheetön, kuten tässä työssä on oletettu.

Viitteet

- [1] Randall. D. Knight, *Physics for Scientists and Engineers – 4th Global Edition*, Pearson 2017
- [2] John. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis – 2nd Edition*, University Science Books, 1997
- [3] Kirk T. McDonald, *Supplemental Notes on Complex Numbers, Complex Impedance, RLC Circuits, and Resonance*, Princeton University 2004 (http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/ph104_2004/AC_circuit_notes.pdf, luettu 22.5.2019)

Liitteet

1. Mittauspöytäkirja
2. Lisämittauspöytäkirja