Tehtävä 1

Etsi yhtälölle $A\bar{x} = \bar{b}$ PNS-ratkaisu ratkaisemalla normaaliyhtälö.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu:

(a) Lasketaan

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

jolloin ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^T A\bar{x} = A^T \bar{b}$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eli $\bar{x} = (3, 2)$.

(b) Lasketaan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

jolloin ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^T A\bar{x} = A^T \bar{b}$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

eli $\bar{x} = \dfrac{1}{3}(4, -1)$.

Tehtävä 2

Määritä vektorin $\bar{u}$ projektio aliavaruuteen V

(a) $\bar{u} = (4, -2, -3)$, $V = \langle (1, 3, -2), (5, 1, 4) \rangle$

(b) $\bar{u} = (1, -1, 3, 1)$, $V = \langle (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 1, 2, 1) \rangle$

Ratkaisu:

(a) Ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^T A\bar{x} = A^T \bar{u}$ saadaan $\bar{x} = \frac{1}{7}(2, 1)$, joten projektio on tällöin

$$\mathrm{Proj}_V(\bar{u}) = A\bar{x} = (1, 1, 0).$$

(b) Ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^T A\bar{x} = A^T \bar{u}$ saadaan $\bar{x} = \frac{1}{3}(-5, 3, 5)$, joten projektio on tällöin

$$\mathrm{Proj}_V(\bar{u}) = A\bar{x} = (5, -2, 8, 0).$$

Tehtävä 3

Kohdat (a) ja (b).

(a) Etsi PNS-ratkaisu (pienimmän neliösumman ratkaisu) yhtälölle $A\bar{x} = \bar{b}$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Mikä on vektorin $\bar{b}$ etäisyys matriisin A sarakkeiden virittämästä aliavaruudesta?

Ratkaisu:

(a) Ratkaisemalla normaaliyhtälö $A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}$ saadaan $\bar{x} = \dfrac{1}{5}(4, -5)$.

(b) Etäisyys matriisin A sarakkeiden virittämästä aliavaruudesta saadaan vektorin $\bar{b}$ ja sen projektion $\mathrm{Proj}_V(\bar{x}) = A\bar{x}$ välisestä etäisyydestä:

$$\|A\bar{x} - \bar{b}\| = \|\frac{1}{5}(13, -6, -10) - (3, -2, -1)\| = \frac{1}{5}\|(-2, 4, -5)\| = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Tehtävä 4

Etsi pistepareihin $(0,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$ ja $(3,2)$ sovitettu pienimmän neliösumman suora lineaarialgebraa käyttäen. Piirrä kuva.

Ratkaisu:

Jos pisteet $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ olisivat suoralla $y = ax + b$, ne toteuttaisivat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} ax_1 + b &= y_1 \\ & \vdots \\ ax_n + b &= y_n \end{cases},$$

joka voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi $A\bar{k} = \bar{q}$, kun asetetaan

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$\bar{k} = (a, b)$ ja

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisemalla kyseinen PNS-yhtälö $A\bar{k} = \bar{q}$ saadaan $\bar{k} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ eli suoran yhtälö on

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}.$$

Tehtävä 5

Etsi se toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja sopii (pienimmän neliösumman mielessä) parhaiten pistepareihin $(1,6)$, $(2,1)$, $(-1,5)$ ja $(-2,2)$.

Ratkaisu:

Jos pisteet $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ olisivat parabolilla $y = ax^2 + bx + c$, ne toteuttaisivat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c & = y_1 \\ & \vdots \\ ax_n^2 + bx_n + c & = y_n \end{cases},$$

joka voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi $A\bar{k} = \bar{q}$, kun asetetaan

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$\bar{k} = (a, b, c)$ ja

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisemalla kyseinen PNS-yhtälö $A\bar{k} = \bar{q}$ saadaan $\bar{k} = \left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{10}, -\dfrac{41}{6}\right)$ eli parabolin yhtälö on

$$y = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{41}{6}.$$

Tehtävä 6

Olkoon A $m \times n$-matriisi.

(a) Osoita, että $A\bar{x} = \bar{0}$ jos ja vain jos $(A^T A)\bar{x} = \bar{0}$.

(b) Osoita, että matriisi $A^T A$ on kääntyvä jos ja vain jos matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Ratkaisu:

(a) Oletetaan ensin, että $A\bar{x} = \bar{0}$. Tällöin matriisin kertolaskun assosiatiivisuuden nojalla $(A^T A)\bar{x} = A^T(A\bar{x}) = A^T\bar{0} = \bar{0}$. Oletetaan sitten, että $(A^T A)\bar{x} = \bar{0}$. Tällöin

$$\|A\bar{x}\|^2 = (A\bar{x}) \cdot (A\bar{x}) = (A\bar{x})^T(A\bar{x}) = \bar{x}^T(A^T A\bar{x}) = \bar{x}^T\bar{0} = \bar{x} \cdot \bar{0} = 0.$$

Euklidisen avaruuden rakenteen nojalla tästä seuraa, että $A\bar{x} = \bar{0}$.

(b) Merkitään $A = \begin{bmatrix}\bar{a}_1, & \cdots, & \bar{a}_n\end{bmatrix}$ ja $A^T A = \begin{bmatrix}\bar{b}_1, & \cdots, & \bar{b}_n\end{bmatrix}$, jolloin

$$\begin{aligned}
A^T A \text{ on kääntyvä} &\iff \text{matriisin } A^T A \text{ sarakevektorit ovat LI} \\
&\iff A^T A\bar{x} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{0} \\
&\iff A\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{0} \\
&\iff \text{matriisin } A \text{ sarakevektorit ovat LI.}
\end{aligned}$$

Tehtävä 7

Olkoon $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ ja B symmetrinen $n \times n$-matriisi, jolle $B^2 = B$ (toisin sanoen B on ortogonaalinen projektio sen sarakkeiden virittämälle aliavaruudelle W). Osoita, että yhtälön $B\bar{x} = \bar{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisujen muodostama joukko on $\{B\bar{b} + \bar{y} : \bar{y} \in W^{\perp}\}$.

Ratkaisu:

Merkitään PNS-ratkaisuden joukkoa $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : B^T B\bar{x} = B^T\bar{b}\}$ ja $R = \{B\bar{b} + \bar{y} : \bar{y} \in W^{\perp}\}$, missä $B = \begin{bmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_n\end{bmatrix}$ ja $W = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n \rangle$. Osoitetaan, että $S = R$.
Olkoon siis $\bar{s} \in S$ eli $B^T B\bar{s} = B^T\bar{b}$. B on symmetrinen, joten $B^T = B$, eli $B^T B\bar{s} = B^2\bar{s} = B\bar{s} = B\bar{b} = B^T\bar{b}$. Nyt $\bar{s} = B\bar{s} + (\bar{s} - B\bar{s}) = B\bar{b} + (\bar{s} - B\bar{s}) = B\bar{b} + \bar{y}$, missä Harjoitusten 3 Tehtävän 6 nojalla $\bar{y} = \bar{s} - B\bar{s} \in W^{\perp}$. Siispä $\bar{s} \in R$ eli $S \subset R$.

Olkoon sitten $\bar{r} \in R$. Tällöin jollakin $\bar{y} \in W^{\perp}$ pätee $\bar{r} = B\bar{b} + \bar{y}$. Nyt $B^T B\bar{r} = B^T B\left(B\bar{b} + \bar{y}\right) = B^T\left(B^2\bar{b} + B\bar{y}\right)$. Koska B on projektio aliavaruudelle W ja $B\bar{b} \in W$, niin $B(B\bar{b}) = \bar{b}$. Vastaavasti $B\bar{y} = 0$, sillä $\bar{y} \in W^{\perp}$. Nyt $B^T(B^2\bar{b} + B\bar{y}) = B^T(B(B\bar{b}) + B\bar{y}) = B^T(\bar{b} + \bar{0}) = B^T\bar{b}$. Saatiin siis, että $B^T B\bar{r} = B^T\bar{b}$ eli $\bar{r} \in S$, josta saadaan, että $R \subset S$.

Näistä saadaan, että $S = R$, kuten haluttiinkin.