Tehtävä 1

Montako 8 numeroista puhelinnumeroa voidaan muodostaa, jos kukin puhelinnumero on muotoa $983abcde$ ja yksikään numero ei esiinny puhelinnumerossa kahta kertaa.

Ratkaisu:

Koska luvut 9, 8 ja 3 on jo käytetty, käytössä olevat numerot ovat $P = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, joiden 5-permutaatioita on $(7)_5 = 2520$.

Vastaus: Puhelinnumeroita on 2520.

Tehtävä 2

Tarkasteltavista henkilöistä viidellä on koira ja neljällä kissa. Kahdella henkilöllä on sekä koira että kissa. Monellako henkilöllä on koira tai kissa (tai molemmat)?

Ratkaisu:

Merkitään koiranomistajia joukolla A ja vastaavasti kissanomistajia joukolla B. Selvästi $|A| = 5$ ja $|B| = 4$. Lisäksi, koska kahdella henkilöllä on sekä koira että kissa, $|A \cap B| = 2$. Tällöin inkluusio-eksluusioperiaatteella

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 4 - 2 = 7.$$

Vastaus: 7 henkilöllä on koira tai kissa (tai molemmat).

Tehtävä 3

Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Laske $\left\{ {4 \atop m} \right\}$ etsimällä kaikki joukon A m-ositukset, kun $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.
(b) Laske kohdan (a) avulla Bellin luku $\mathcal{B}(4)$.

Ratkaisu:

(a) Lasketaan m-ositukset:

- $\left\{ {4 \atop 1} \right\} = |\mathcal{O}_1| = |\{\{1, 2, 3, 4\}\}| = 1$
- $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = |\mathcal{O}_2| = |\{\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \ldots, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}\}| = 7$
- $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = |\mathcal{O}_3| = 6$
- $\left\{ {4 \atop 4} \right\} = |\mathcal{O}_4| = |\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}| = 1.$

(b) Bellin luvun määritelmästä $\mathcal{B}(4) = \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$

Tehtävä 4

Näytä, että $\mathcal{B}(5) = 52$ kahdella eri tavalla:
(a) Määritelmään pohjautuen Stirlingin kolmion avulla.
(b) Rekursiivisesti Pascalin kolmion ja kaavan $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathcal{B}(k)$ avulla.

Ratkaisu:

(a) Bellin luvun määritelmää ja Stirlingin kolmioita käyttämällä

$$\mathcal{B}(5) = \left\{ {5 \atop 1} \right\} + \left\{ {5 \atop 2} \right\} + \left\{ {5 \atop 3} \right\} + \left\{ {5 \atop 4} \right\} + \left\{ {5 \atop 5} \right\} = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52.$$

(b) Lasketaan $\mathcal{B}(5)$ rekursiivisesti käyttäen tietoa, että $\mathcal{B}(0) = 1$:

- $\mathcal{B}(0) = 1$
- $\mathcal{B}(1) = \binom{0}{0}\mathcal{B}(0) = 1$
- $\mathcal{B}(2) = \binom{1}{0}\mathcal{B}(0) + \binom{1}{1}\mathcal{B}(1) = 1 + 1 = 2$
- $\mathcal{B}(3) = \ldots = 5$
- $\mathcal{B}(4) = \ldots = 15$
- $\mathcal{B}(5) = \ldots = 52$

Tehtävä 5

Osoita Newtonin binomikaava

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m},$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ratkaisu:

Kun $n = 1$, pätee triviaalisti

$$(x+y)^1 = x + y = \sum_{m=0}^{1} \binom{1}{m} x^0 y^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0.$$

Tehdään sitten induktio-oletus, että

$$(x+y)^k \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m}$$

pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tämän oletuksen avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y) \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m} \\
&= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{m+1} y^{k-m} + \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m+1} \\
&= \binom{k}{k} x^{k+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} x^{m+1} y^{k-m} + \binom{k}{0} y^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m+1} \\
&= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m-1} x^m y^{k-m+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m+1}.
\end{aligned}$$

Pascalin kaavasta saadaan sitten, että

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \left(\binom{k}{m-1} + \binom{k}{m} \right) x^m y^{k-m+1} \\
&= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} x^m y^{k-m+1} \\
&= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} x^m y^{k-m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} x^m y^{k-m+1}.
\end{aligned}
$$

Väite saadaan siten induktioperiaatteella.

Tehtävä 6

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita Newtonin binomikaavan avulla, että

(a) $\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m} = 0$.

(b) $\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} = 2^n$.

Ratkaisu:

(a) Valinnalla $x = -1$ ja $y = 1$ saadaan Newtonin binomikaavasta, että

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^m 1^{n-m} = (-1+1)^n = 0^n = 0.$$

(b) Valinnalla $x = y = 1$ saadaan Newtonin binomikaavasta, että

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}1^m 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n.$$

Tehtävä 7

Osoita induktiolla, että

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Ratkaisu:

Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Kun $n = 2$, saadaan Stirlingin kaavalla

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 + 0 = 1 = \binom{2}{2}$$

eli perusaskel pätee. Tehdään sitten induktio-oletus siten, että

$$\begin{Bmatrix} k \\ k-1 \end{Bmatrix} = \binom{k}{2}$$

jollakin $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tällöin Stirlingin kaavasta saadaan, että

$$\begin{Bmatrix} k+1 \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} k \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ k-1 \end{Bmatrix} = k + \begin{Bmatrix} k \\ k-1 \end{Bmatrix},$$

joka on induktio-oletuksen nojalla

$$k + \begin{Bmatrix} k \\ k-1 \end{Bmatrix} = k + \binom{k}{2} = k + \frac{k!}{2!(k-2)!} = k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \binom{k+1}{2}.$$

Siispä induktioperiaatteella $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$.

Tehtävä 8

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $A = \{1, \dots, n\}$. Osoita, että on olemassa

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

bijektiota $f : A \to A$ siten, että $f(m) \neq m$ kaikilla $m \in A$. *Huom! kyseistä lukua merkitään usein symbolilla* $!n$.

Ratkaisu:

Merkitään $X = \{f : A \to A : f \text{ on bijektio ja } \forall\, m \in A : f(m) \neq m\}$,
$Y_m = \{f : A \to A : f \text{ on bijektio ja} f(m) = m\}$ ja $Y = \cup_{m \in A} Y_m$. Tällöin summaperiaatteen nojalla

$$|X| = \underbrace{|X \cup Y|}_{\text{bijektiot } f:A\to A} - |Y|,$$

jolloin Lemman 1.1 mukaan $|X \cup Y| = n!$ eli $|X| = n! - |Y|$. Seulayhtälöstä saadaan nyt, että

$$|Y| = \left| \bigcup_{m \in A} Y_m \right| = \sum_{k \in A} (-1)^{k-1} \Sigma_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Sigma_k,$$

missä

$$\Sigma_k = \sum_{B \in \mathcal{P}_k(A)} \left| \bigcap_{i \in B} Y_i \right|.$$

Jälleen Lemman 1.1 avulla

$$\left| \bigcap_{i \in B} Y_i \right| = \left| \bigcap_{i \in \{1,\dots,k\}} Y_i \right| = (n-k)!.$$

Siispä

$$\Sigma_k = \sum_{B \in \mathcal{P}_k(A)} (n-k)! = \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

koska

$$|\mathcal{P}_k(A)| = \binom{n}{k}.$$

Tästä saadaan, että

$$\left| \bigcup_{m \in A} Y_m \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!},$$

jolloin

$$\begin{aligned}
|X| &= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} \\
&= n! \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right) \\
&= n! \left(1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} - 1 \right) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!}
\end{aligned}$$

ja väite on siten osoitettu.