Tehtävä 1

Anna luonnollinen päättely propositiolauseelle $\neg\neg A$ lauseesta A eli $\{A\} \vdash \neg\neg A$.

Ratkaisu:

Tehdään tilapäinen oletus $\neg A$, jolloin konjunktion tuontisäännöllä saadaan ristiriita $A \wedge \neg A$. Tällöin negaation tuontisäännöllä hylätään oletus $\neg A$ ja saadaan $\neg\neg A$. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad [\neg A]^1}{A \wedge \neg A}\,\wedge_T}{\neg\neg A}\,\neg_{T,1}$$

Tehtävä 2

Olkoot A, B, C propositiolauseita. Näytä, että $\{(A \to C), A\} \vdash (A \land (B \lor C))$.

Ratkaisu:

Käytetään molempiin oletuksiin implikaation elimiontia, jolloin saadaan C. Tällöin disjunktion tuonnilla saadaan $B \lor C$, johon käyttämällä oletuksen A kanssa konjunktion tuontisääntöä saadaan $(A \land (B \lor C))$. Formaalisti:

$$\dfrac{A \qquad \dfrac{\dfrac{(A \to C) \qquad A}{C}\to_E}{B \lor C}\lor_T}{(A \land (B \lor C))}\land_T$$

Tehtävä 3

Olkoot A, B, C propositiolauseita. Näytä, että $\{((A \land B) \to C), A\} \vdash (B \to C)$

Ratkaisu:

Tehdään tilapäinen oletus B, jolloin oletuksen A saadaan konjunktion tuonnilla $A \land B$. Yhdistämällä tämä oletukseen $(A \land B) \to C$ saadaan implikaation eliminoinnilla C. Tällöin implikaation tuominen sallii tilapäisen oletuksen B hylkäämiseen ja saadaan $B \to C$. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{(A \land B) \to C \qquad \dfrac{A \qquad [B]^1}{A \land B}\,\land_T}{C}\,\to_E}{B \to C}\,\to_{T,1}$$

Tehtävä 4

Olkoot A, B propositiolauseita. Näytä, että $\{(\neg B \to \neg A)\} \vdash (A \to B)$.

Ratkaisu:

Tehdään tilapäinen oletus $\neg B$. Tällöin käyttämällä oletusta $\neg B \to \neg A$ ja implikaation eliminointia saadaan $\neg A$. Tekemällä toinen tilapäinen oletus A ja käyttämällä konjunktion tuontia saadaan $A \wedge \neg A$. Tämä on ristiriita, joten käyttämällä negaation eliminointia saadaan $\neg\neg B$ ja samalla voidaan hylätä $\neg B$. Eliminoimalla kaksoisnegaatio saadaan B, jolloin implikaation tuonnilla saadaan haluttu $A \to B$. Samalla hylätään A. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{\neg B \to \neg A \qquad [\neg B]^1}{\neg A}\,{\to_E}}{A \wedge \neg A}\,{\wedge_T}}{\neg\neg B}\,{\neg_{T,1}}}{B}\,{\neg_E}}{A \to B}\,{\to_{T,2}}$$

Tehtävä 5

Päteekö $\{(p_1 \to p_2), (p_1 \to (\neg p_2 \to p_3))\} \vdash (\neg p_1 \lor p_3)$? Perustele vastauksesi. Jos pätee, anna luonnollinen päättely.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{S} = \{(p_1 \to p_2), (p_1 \to (\neg p_2 \to p_3))\}$ ja $A = (\neg p_1 \lor p_3)$. Tarkastellaan, onko $\mathcal{S} \implies A$. Totuustaulusta huomataan heti alussa, että $\mathcal{S} \not\Longrightarrow A$:

p_1	p_2	p_3	$((p_1$	$\to$	$p_2)$	$\land$	$(p_1$	$\to$	$(\neg p_2$	$\to$	$p_3)))$	$\to$	$(\neg p_1$	$\lor$	$p_3)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**1**	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	**0**	0	0	0

Tällöin eheyslauseen (Seuraus 3.4) nojalla $\mathcal{S} \nvdash A$ eli päättely ei päde.

Tehtävä 6

Päteekö $\{\neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))\} \vdash (\neg p_1 \land \neg p_2)$? Perustele vastauksesi. Jos pätee, anna luonnollinen päättely.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{S} = \{\neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))\}$ ja $A = (\neg p_1 \land \neg p_2)$. Tutkitaan, päteekö $\mathcal{S} \implies A$. Totuustaulusta nähdään, näin on:

p_1	p_2	$(\neg$	$(p_1$	$\lor$	$(\neg p_1$	$\to$	$p_2)))$	$\to$	$(\neg p_1$	$\land$	$\neg p_2)$
0	0	1	0	0	1	0	0	**1**	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	**1**	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	**1**	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	**1**	0	0	0

Tällöin täydellisyyslauseesta seuraa, että $\mathcal{S} \vdash A$.

Tehdään ensin tilapäinen oletus p_1, jolloin disjunktion tuontisäännöllä saadaan $p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2)$. Käyttämällä oletusta $\neg(\neg p_1 \to p_2)$ ja konjunktion tuontisääntöä saadaan $(\neg p_1 \to p_2) \land \neg(\neg p_1 \to p_2)$, mikä on ristiriita. Siispä negaation tuontisäännöllä saadaan $\neg p_1$, ja samalla voidaan hylätä p_1. Toisaalta, tekemällä tilapäinen oletus $\neg p_1 \to p_2$ saadaan disjunktion tuontisäännöllä $p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2)$. Käyttämällä jälleen oletusta $\neg(\neg p_1 \to p_2)$ saadaan konjunktion tuontisäännöllä ristiriita $(\neg p_1 \to p_2) \land \neg(\neg p_1 \to p_2)$, jolloin negaation tuontisäännöllä $\neg(\neg p_1 \to p_2)$, jolloin voidaan hylätä $\neg p_1 \to p_2$. Nyt konjunktion tuontisäännöllä saadaan $\neg p_1 \land \neg(\neg p_1 \to p_2)$, josta konjunktion eliminoinnilla tulee $\neg(\neg p_1 \to p_2)$. Tehdään jälleen tilapäinen oletus p_3, jolloin implikaation tuonnilla saadaan $\neg p_1 \to p_2$. Yhdistämällä nämä konjunktion tuontisäännöllä saadaan $(\neg p_1 \to p_2) \land \neg(\neg p_1 \to p_2)$, mikä on ristiriita. Negaation tuonnilla siis $\neg p_2$, ja hylätään samalla p_2. Käytetään sitten vielä aiemmin saatua tulosta $\neg p_1 \land \neg(\neg p_1 \to p_2)$. Konjunktion eliminoinnilla tulee $\neg p_1$, jolloin konjunktion tuonnilla saadaan $\neg p_1 \land \neg p_2$. Formaalisti:

$$
\dfrac{
\dfrac{(\neg p_1 \land \neg(\neg p_1 \to p_2))}{\neg p_1}\,\land_E
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[p_2]^3}{(\neg p_1 \to p_2)}\,\to_T
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[p_1]^1}{(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))}\,\lor_T
\quad
\neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))
}{(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2)) \land \neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))}\,\land_T
}{\neg p_1}\,\neg_{T,1}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[(\neg p_1 \to p_2)]^2}{(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))}\,\lor_T
\quad
\neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))
}{(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2)) \land \neg(p_1 \lor (\neg p_1 \to p_2))}\,\land_T
}{\neg(\neg p_1 \to p_2)}\,\neg_{T,2}
}{(\neg p_1 \land \neg(\neg p_1 \to p_2))}\,\land_T
}{\neg(\neg p_1 \to p_2)}\,\land_E
}{(\neg p_1 \to p_2) \land \neg(\neg p_1 \to p_2)}\,\land_T
}{\neg p_2}\,\neg_{T,3}
}{(\neg p_1 \land \neg p_2)}\,\land_T
$$

Tehtävä 7

Olkoon A propositiolause. Näytä, että $\vdash (A \lor \neg A)$.

Ratkaisu:

Tehdään aluksi tilapäinen oletus A, jolloin disjunktion tuontisäännöllä $A \lor \neg A$. Tehdään sitten toinen tilapäinen oletus $\neg(A \lor \neg A)$. Konjunktion tuontisäännöllä saadaan $(A \lor \neg A) \land \neg(A \lor \neg A)$ eli ristiriita, joten negaation tuontisäännöllä saadaan hylkäämällä A, että $\neg A$. Jälleen disjunktion tuontisäännöllä saadaan $A \lor \neg A$, jolloin käyttämällä konjunktion tuontisääntöä oletukseen $\neg(A \lor \neg A)$ saadaan jälleen ristiriita $(A \lor \neg A) \land \neg(A \lor \neg A)$, jolloin negaation tuontisäännöllä voidaan hylätä oletus $\neg(A \lor \neg A)$ ja saadaan $\neg\neg(A \lor \neg A)$, josta saadaan negaation eliminoinnilla $(A \lor \neg A)$. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \lor \neg A}\,\lor_T \qquad [\neg(A \lor \neg A)]^2}{(A \lor \neg A) \land \neg(A \lor \neg A)}\,\land_T}{\neg A}\,\neg_{T,1}}{A \lor \neg A}\,\lor_T \qquad [\neg(A \lor \neg A)]^2}{(A \lor \neg A) \land \neg(A \lor \neg A)}\,\land_T}{\neg\neg(A \lor \neg A)}\,\neg_{T,2}}{(A \lor \neg A)}\,\neg_E$$

Tehtävä 8

Tutustu luentoprujun liitteeseen A, joka käsittelee induktiota rakenteen suhteen. Olkoon B propositiolause. Näytä induktiolla rakenteen suhteen, että lauseessa B esiintyy yhtä monta vasenta kuin oikeaa sulkumerkkiä.

Ratkaisu:

Olkoon p_n, $n \in \mathbb{N}$, propositiosymboli. Tällöin vasempia ja oikeita sulkuja on molempia nolla, joten väite pätee propositiosymboleille. Olkoon sitten X ja Y propositiolauseita, jotka toteuttavat väitteen. Tällöin lauseissa $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \to Y)$ ja $(X \leftrightarrow Y)$ on selvästi sama määrä sulkeita, sillä oletuksen mukaan lauseissa X ja Y on sama määrä vasempia ja oikeita sulkeita. Nyt, koska

$$\mathcal{K} = \mathrm{cl}\left(\{p_n : n \in \mathbb{N}\}; f_1, \ldots, f_n\right),$$

merkitsemällä $\mathbb{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ saadaan, että $\mathcal{K} = \mathrm{cl}(\mathbb{P}; f_1, \ldots, f_n)$. Edelle osoitettiin siis, että väite pätee kaikilla propositiosymboleilla eli kaikilla joukon $\mathbb{P}$ alkiolla. Lisäksi näytettiin, että jos väite pätee $X, Y \in \mathcal{K}$, niin väite pätee myös lauseille $f_1(X)$ ja $f_2(X, Y), \ldots, f_5(X, Y)$, missä $f_1, \ldots, f_5$ ovat määritelmästä (A.1.1). Tällöin Seurauksen A.2 mukaan väite pätee kaikilla joukon $\mathcal{K}$ alkiolla, erityisesti se pätee propositiolauselle $B \in \mathcal{K}$.

*Tehtävä 9

Oletetaan, että on olemassa saari, jossa asuu tasan kahdenlaisia ihmisiä – rehtejä ja retkuja. Rehdit puhuvat aina totta ja retkut valehtelevat aina (sekä noudattavat totuudessaan propositiologiikan semantiikkaa). Päällepäin tyyppejä ei voi erottaa toisistaan.

- Vierailin kerran kyseisellä saarella ja tapasin kaksi saaren asukasta. Kysyin heiltä toiselta:

  "Onko kumpikaan teistä rehti?"

  Hän vastasi ja tiesin vastauksen kysymykseeni. Onko vastaaja rehti vai retku? Entä onko toinen asukkaista rehti vai retku?

  Vakuutan sinulle, että olen antanut tarpeeksi tietoa ongelman ratkaisemiseksi.

- Kohtaat kaksi muuta saaren asukasta, henkilöt A ja B. He toteavat seuraavaa.

  A: "B on retku."

  B: "A on rehti."

  Voitko päätellä mitä tyyppiä (rehti vai retku) henkilöt A ja B ovat?

Ratkaisu:

- Jos A vastasi "Kyllä.", niin tällöin on mahdollista, että A on rehti, sillä väite pitää nyt paikkaansa. Toisaalta, jos A ja B ovat molemmat retkuja, niin tällöin A odotetusti valehteli. Siispä A ei ole voinut vastata "Kyllä.", sillä minä tiedän vastauksen, mutta jos A olisi vastannut "Kyllä.", niin en tällöin pystyisi mitenkään tietämään vastausta. Siispä A:n vastauksen täytyy olla "Ei.". Tällöin ei voi olla, että A ja B olisivat molemmat retkuja, koska nyt A olisikin puhunut totta.

  Täytyy siis olla, että A on retku ja B on rehti.

- Oletetaan, että A on rehti. Tällöin B on retku (koska A puhuu totta), mutta toisaalta B puhuu myös totta, mikä on ristiriita. Oletetaan sitten, että A on retku. Tällöin B:n täytyy olla rehti (koska A valehtelee), mutta nyt B myös valehtelee väittäessään A:ta rehdiksi. Päädyttiin jälleen ristiriitaan.

  Olivatpa A tai B rehtejä tai retkuja, heidän puheet ovat keskenään ristiriidassa.