Tehtävä 1

Russelin kylässä muodostettiin 1900-luvulla parranajotietokonta. Tähän malliin käytettiin aakkostoa $L = \{P_1^1, P_2^1, P_3^2\}$.

Parranajotietokanta mallinnettiin seuraavasti: $\mathcal{M} = (M, P_1^{\mathcal{M}}, P_2^{\mathcal{M}}, P_3^{\mathcal{M}})$, missä M on kyläläisten tunnistenumeroiden kokoelma, $P_1^{\mathcal{M}}$ sisältää naisten tunnistenumerot, $P_2^{\mathcal{M}}$ sisältää partureiden tunnistenumerot ja $(x, y) \in P_3^{\mathcal{M}}$, jos henkilö tunnistenumerolla x ajaa y tunnistenumeroisen henkilön parran.

Muodosta L-kaava A, joka sanoo, että

(a) Russelin kylässä on parturi ja kyseinen parturi ajaa kaikkien niiden ja vain niiden parran, jotka eivät aja omaa partaansa.

(b) Russelin kylässä on parturi ja kyseinen parturi ajaa kaikkien niiden ja vain niiden miesten parran, jotka eivät aja omaa partaansa.

Ratkaisu:

(a) Halutaan, että on olemassa parturi siten, että tämä parturi ajaa vain ja ainoastaan niiden parran, jotka eivät aja omaa partaansa. Siispä L-kaavan täytyy olla muotoa

$$\exists x_1 Q,$$

missä Q on jokin L-kaava. Jotta x_1 olisi parturi, täytyy olla $P_2^1(x_1)$. Jotta parturi ajaa vain haluttujen parrat, täytyy lisäksi päteä

$$P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2),$$

mikä siis tarkoittaa, että x_1 (parturi) ajaa x_2:n parran jos ja vain jos x_2 ei aja omaa partaansa. Nämä yhdistämällä saadaan haluttu kaava

$$\exists x_1 (P_2^1(x_1) \wedge \forall x_2 (P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2))).$$

(b) Tilanne on vastaava kuin (a)-kohdassa, mutta nyt tulee lisäehto, että parturi ajaa vain ja ainoastaan niiden parran, jotka eivät aja omaa partaansa, jos ja vain jos kyseessä on mies. Näin ollen

$$\exists x_1 (P_2^1(x_1) \wedge \forall x_2 (\neg P_1^1(x_2) \leftrightarrow (P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2)))).$$

Tehtävä 2

Etsi Russelin kylä (eli $\mathcal{M}$), jossa Tehtävän 1

(a) kohdan (a) lause on totta. Mitä voit sanoa parturista? Kuka ajaa parturin parran?

(b) kohdan (b) lause on totta. Mitä voit sanoa parturista? Kuka ajaa parturin parran?

Ratkaisu:

(a) Kyseessä on Russelin paradoksi, joten osoitetaan, että tällaista kylää/mallia/parturia ei ole, eli että ei olemassa mallia $\mathcal{M}$ siten, että

$$\mathcal{M} \models \exists x_1(P_2^1(x_1) \wedge \forall x_2(P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2))).$$

Tehdään vastaoletus[1], että on olemassa malli $\mathcal{M}$ ja tulkintakuvaus s siten, että

$$\mathcal{M} \models_s \exists x_1(P_2^1(x_1) \wedge \forall x_2(P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2))).$$

Tarskin totuusmääritelmästä seuraa, että jollakin $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/a)} (P_2^1(x_1) \wedge \forall x_2(P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2))).$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/a)} P_2^1(x_1) \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \models_{s(x_1/a)} \forall x_2(P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2, x_2)).$$

Näin ollen $x_1^{\mathcal{M}, s(x_1/a)} = s(x_1/a)(x_1) = a \in P_2^{\mathcal{M}}$ ja kaikilla $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/a)(x_2/b)} (P_3^2(x_1, x_2) \leftrightarrow \neg P_3(x_2, x_2)).$$

Siispä täytyy olla

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/a)(x_2/b)} P_3^2(x_1, x_2) \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \not\models_{s(x_1/a)(x_2/b)} P_3(x_2, x_2)$$

tai

$$\mathcal{M} \not\models_{s(x_1/a)(x_2/b)} P_3^2(x_1, x_2) \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \models_{s(x_1/a)(x_2/b)} P_3(x_2, x_2).$$

Nyt $\left(x_1^{\mathcal{M}, s(x_1/a)(x_2/b)}, x_2^{\mathcal{M}, s(x_1/a)(x_2/b)}\right) = (a, b)$ ja $\left(x_2^{\mathcal{M}, s(x_1/a)(x_2/b)}, x_2^{\mathcal{M}, s(x_1/a)(x_2/b)}\right) = (b, b)$, joten

[1] Tämä on itse asiassa heikompi oletus, sillä lause on totta vain jos $\mathcal{M}$ mallintaa sen kaikilla tulkintakuvauksilla s. Tässä kuitenkin riittää, että homma menee pieleen yhdelläkin tulkintakuvauksella s.

$$(a,b) \in P_3^{\mathcal{M}} \quad \text{ja} \quad (b,b) \notin P_3^{\mathcal{M}}$$

tai

$$(a,b) \notin P_3^{\mathcal{M}} \quad \text{ja} \quad (b,b) \in P_3^{\mathcal{M}}$$

kaikilla $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Eritysesti tämä pätee, kun $b = a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, jolloin

$$(a,a) \in P_3^{\mathcal{M}} \quad \text{ja} \quad (a,a) \notin P_3^{\mathcal{M}}$$

tai

$$(a,a) \notin P_3^{\mathcal{M}} \quad \text{ja} \quad (a,a) \in P_3^{\mathcal{M}}.$$

Selvästikään ei voi olla yhtäaikaa $(a,a) \in P_3^{\mathcal{M}}$ ja $(a,a) \notin P_3^{\mathcal{M}}$, joten päädyttiin ristiriita. Tällaista kylää, ja siten parturia, ei siis voi olla olemassa.

(b) Olkoon $\mathcal{M}$ malli siten, että $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{1,2,3\}$, $P_1^{\mathcal{M}} = \{1\} = P_2^{\mathcal{M}}$ ja $P_3^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(1,3)\}$. Olkoon lisäksi s $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus. Nyt $x_1^{\mathcal{M},s(x_1/1)} = s(x_1/1)(x_1) = 1 \in P_2^{\mathcal{M}}$, joten Tarskin totuusmääritelmästä $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/1)} P_2(x_1)$. Olkoon sitten $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, jolloin $x_2^{\mathcal{M},s(x_1/1)(x_2/a)} = a$, $\left(x_1^{\mathcal{M},s(x_1/1)(x_2/a)}, x_2^{\mathcal{M},s(x_1/1)(x_2/a)}\right) = (1,a)$ ja $\left(x_2^{\mathcal{M},s(x_1/1)(x_2/a)}, x_2^{\mathcal{M},s(x_1/1)(x_2/a)}\right) = (a,a)$. Jos $a = 1$, niin $(1,1) \notin P_3^{\mathcal{M}}$ ja $1 \in P_1^{\mathcal{M}}$, jolloin

$$\mathcal{M} \nvDash_{s(x_1/1)(x_2/1)} (P_3^2(x_1,x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2,x_2))$$

ja

$$\mathcal{M} \nvDash_{s(x_1/1)(x_2/1)} \neg P_1^1(x_2).$$

Jos taas $a = 2$ tai $a = 3$, niin $a \notin P_1^{\mathcal{M}}$, $(1,a) \in P_3^{\mathcal{M}}$ ja $(a,a) \notin P_3^{\mathcal{M}}$ eli

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/1)(x_2/a)} (P_3^2(x_1,x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2,x_2))$$

ja

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/1)(x_2/a)} \neg P_1^1(x_2).$$

Näin ollen Tarskin totuusmääritelmästä saadaan, että

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/1)} \forall x_2(\neg P_1^1(x_2) \leftrightarrow (P_3^2(x_1,x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2,x_2))),$$

jolloin yhdistämällä edellä saatuun tulokseen $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/1)} P_2(x_1)$ saadaan haluttu lopputulos

$$\exists x_1(P_2^1(x_1) \land \forall x_2(\neg P_1^1(x_2) \leftrightarrow (P_3^2(x_1,x_2) \leftrightarrow \neg P_3^2(x_2,x_2)))).$$

Tehtävä 3

Näytä, että kaava $(\exists x_1 A \to \neg\forall x_1 \neg A)$ on validi.

Ratkaisu:

Kaava $(\exists x_1 A \to \neg\forall x_1 \neg A)$ on validi jos ja vain jos

$$\exists x_1 A \implies \neg\forall x_1 \neg A.$$

Olkoon siis $\mathcal{M}$ malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus siten, että $\mathcal{M} \vDash_s \exists x_1 A$. Osoitetaan, että myös $\mathcal{M} \vDash_s \neg\forall x_1 \neg A$. Tehdään vastaoletus

$$\mathcal{M} \not\vDash_s \neg\forall x_1 \neg A,$$

joka on Tarskin totuusmääritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \neg A.$$

Näin ollen jokaiselle $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M}_{s(x_1/a)} \neg A$. Oletuksen $\mathcal{M} \vDash_s \exists x_1 A$ nojalla on kuitenkin olemassa $a' \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ siten, että $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/a')} A$. Saatiin ristiriita, joten alkuperäinen väite pätee eli $\mathcal{M} \vDash_s \neg\forall x_1 \neg$. Siispä $\exists x_1 A \implies \neg\forall x_1 \neg A$ eli $(\exists x_1 A \to \neg\forall x_1 \neg A)$ on validi.

Tehtävä 4

Näytä, että $(\forall x_1 P_1^1(x_1) \to \forall x_1 P_2^1(x_1)) \not\Rightarrow \forall x_1(P_1^1(x_1) \to P_2^1(x_1))$.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{L} = \{P_1^1, P_2^1\}$ aakkosto ja $\mathcal{M}$ malli, jolle $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{\alpha, \beta\}$, $P_1^{\mathcal{M}} = \{\alpha\}$ ja $P_2^{\mathcal{M}} = \{\beta\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{M} \vDash (\forall x_1 P_1^1(x_1) \to \forall x_1 P_2^1(x_1))$ ja $\mathcal{M} \nvDash \forall x_1(P_1^1(x_1) \to P_2^1(x_1))$.

Olkoon s $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus. Nyt $x_1^{\mathcal{M}, s(x_1/\beta)} = s(x_1/\beta)(x_1) = \beta$, joten koska $\beta \notin P_1^{\mathcal{M}}$, niin Tarskin totuusmääritelmän nojalla $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/\beta)} P_1^1(x_1)$ ja siten $\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 P_1^1(x_1)$. Näin ollen

$$\mathcal{M} \vDash_s (\forall x_1 P_1^1(x_1) \to \forall x_1 P_2^1(x_1)).$$

Toisaalta $x_1^{\mathcal{M}, s(x_1/\alpha)} = \alpha \in P_1^{\mathcal{M}}$, joten $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/\alpha)} P_1^1(x_1)$. Kuitenkin $\alpha \notin P_2^{\mathcal{M}}$, joten $\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/\alpha)} P_2^1(x_1)$. Näin ollen Tarskin totuusmääritelmän perusteella $\mathcal{M} \nvDash_{s(x_1/\alpha)} (P_1^1(x_1) \to P_2^1(x_1))$ ja siten

$$\mathcal{M} \nvDash_s \forall x_1(P_1^1(x_1) \to P_2^1(x_1)).$$

s oli mielivaltainen, joten väite on siten osoitettu.

Tehtävä 5

Näytä, että $\forall x_1(A \to B) \implies (\forall x_1 A \to \forall x_1 B)$.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{M}$ malli siten, että $\mathcal{M} \vDash \forall x_1(A \to B)$, ja s $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus. Osoitetaan, että myös $\mathcal{M} \vDash (\forall x_1 A \to \forall x_1 B)$, josta väite seuraa. Tarskin totuusmääritelmän avulla oletuksesta saadaan, että kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/a)} (A \to B),$$

josta seuraa, että

$$\mathcal{M} \nvDash_{s(x_1/a)} A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M} \vDash_{s(x_1/a)} B.$$

Koska nämä pätevät kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, saadaan Tarskin totuusmääritelmästä, että

$$\mathcal{M} \nvDash_s \forall x_1 A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 B.$$

Näin ollen

$$\mathcal{M} \vDash_s (\forall x_1 A \to \forall x_1 B).$$

s oli mielivaltainen, joten

$$\mathcal{M} \vDash (\forall x_1 A \to \forall x_1 B),$$

kuten haluttiinkin.

Tehtävä 6

Näytä, että kaava $\exists x_1 \forall x_2((P_1^2(x_1,x_2) \wedge \neg P_1^2(x_2,x_1)) \to (P_1^2(x_1,x_2) \leftrightarrow P_1^2(x_2,x_2)))$ ei ole validi.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{M}$ malli siten, että $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0,1\}$ ja $P_1^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(0,1)\}$. Olkoon myös s $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus ja $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Tällöin

$$x_1^{\mathcal{M},s(x_1/a)(x_2/1)} = a \quad \text{ja} \quad x_2^{\mathcal{M},s(x_1/a)(x_2/1)} = 1,$$

jolloin

$$\left(x_1^{\mathcal{M},s(x_1/a)(x_2/1)}, x_2^{\mathcal{M},s(x_1/a)(x_2/1)}\right) = (a,1).$$

Jotta $(a,1) \in P_1^{\mathcal{M}}$, täytyy olla $a = 0$. Näin ollen

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/0)(x_2/1)} P_1^2(x_1,x_2).$$

Lisäksi $(1,0) \notin P_1^{\mathcal{M}}$, joten

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/0)(x_2/1)} \neg P_1^2(x_2,x_1).$$

Näin ollen

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/0)(x_2/1)} (P_1^2(x_1,x_2) \wedge \neg P_1^2(x_2,x_1)).$$

Kuitenkin $(0,0) \in P_1^{\mathcal{M}}$ ja $(1,1) \notin P_1^{\mathcal{M}}$, jolloin

$$\mathcal{M} \not\models_{s(x_1/0)(x_2/1)} (P_1^2(x_1,x_1) \leftrightarrow P_1^2(x_2,x_2)).$$

Tästä saadaan, että

$$\mathcal{M} \not\models_{s(x_1/a)(x_2/1)} ((P_1^2(x_1,x_2) \wedge \neg P_1^2(x_2,x_1)) \to (P_1^2(x_1,x_1) \leftrightarrow P_1^2(x_2,x_2))).$$

Koska $1 \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, niin erityisesti

$$\mathcal{M} \not\models_{s(x_1/a)} \forall x_2((P_1^2(x_1,x_2) \wedge \neg P_1^2(x_2,x_1)) \to (P_1^2(x_1,x_1) \leftrightarrow P_1^2(x_2,x_2))).$$

Koska a oli alun perin mielivaltainen, niin

$$\mathcal{M} \not\models_s \exists x_1 \forall x_2((P_1^2(x_1,x_2) \wedge \neg P_1^2(x_2,x_1)) \to (P_1^2(x_1,x_1) \leftrightarrow P_1^2(x_2,x_2)))$$

eli kaava ei ole validi.

Tehtävä 7

Anna luonnollinen päättely $\vdash (\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1) \to \exists x_1 P_1^2(x_1, x_1))$.

Ratkaisu:

Tehdään tilapäinen oletus $\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1)$. Tällöin universaalikvanttorin eliminoinnilla saadaan $P_1^2(c_1, c_1)$ tekemällä sijoitus x_1/c_1. Nyt eksistenssikvanttorin tuonnilla saadaan $\exists x_1 P_1^2(x_1, x_1)$, jolloin implikaation tuonnilla saadaan $(\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1) \to \exists x_1 P_1^2(x_1, x_1))$ ja samalla voidaan hylätä oletus $\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1)$. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1)]^1}{P_1^2(c_1, c_1)}\ \forall_E}{\exists x_1 P_1^2(x_1, x_2)}\ \exists_T}{\forall x_1 P_1^2(c_1, x_1) \to \exists x_1 P_1^2(x_1, x_2)}\ \to_{T,1}$$

Tehtävä 8

Olkoot A ja B kaavoja. Anna luonnollinen päättely $(\exists x_1 A \to B) \vdash \exists x_1(A \to B)$.

Ratkaisu:

Tehdään tilapäinen oletus A, josta eksistenssikvanttorin tuonnilla saadaan $\exists x_1 A$. Käyttämällä annettua oletusta $\exists x_1 A \to B$ ja implikaation eliminointia saadaan B. Nyt tuomalla implikaatio saadaan $A \to B$ ja samalla voidaan hylätä oletus A. Nyt eksistenssikvanttorin tuonnilla saadaan $\exists x_1(A \to B)$. Formaalisti:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x_1 A \to B \qquad \dfrac{[A]^1}{\exists x_1 A}\,\exists_T}{B}\,\to_E}{A \to B}\,\to_{T,1}}{\exists x_1(A \to B)}\,\exists_T
$$

*Tehtävä 9

Oletetaan, että on olemassa saari, jossa asuu tasan kahdenlaisia ihmisiä – rehtejä ja retkuja. Rehdit puhuvat aina totta ja retkut valehtelevat aina (sekä noudattavat totuudessaan propositiologiikan semantiikkaa). Päällepäin tyyppejä ei voi erottaa toisistaan. Kutsumme saaria RR-saariksi.

Erään tällaisen RR-saaren asukkaat ovat muodostaneet klubeja. Asukas voi kuulua useampaan kuin yhteen klubiin. Olkoon K eräs klubi ja A sen asukas. Nyt A sanoo joko olevansa klubin K jäsen tai A sanoo, että hän ei ole klubin K jäsen (mutta ei luonnollisesti molempia).

Sherlock Holmes vieraili kerran kyseisellä RR-saarella. Hän halusi tietää onko kyseinen saari Gödelin saari. Saarta kutsutaan Gödelin saareksi, jos siellä pätee seuraava tosiasia.

G: Jokaista klubia K kohti on olemassa saaren asukas, joka sanoo olevansa klubin K jäsen. Hän saattaa toki valehdella.

Sherlock Holmesille selvisi seuraava asiantila: Jokainen klubi on nimetty jonkun saaren asukkaan mukaan ja jokaisen asukkaan mukaan on nimetty klubi. Asukas ei välttämättä kuulu hänen mukaansa nimettyyn klubiin. Jos hän kuuluu, häntä kutsutaan seuralliseksi; jos hän ei kuulu, häntä kutsutaan araksi. Saaren asukkaalla A on niin kutsuttu kaveri B, jos B väittää, että A on seurallinen.

Sherlock ei vieläkään pystynyt päättelemään onko hän Gödelin saarella, kunnes hänelle selvisi seuraava tosiasia kyseisestä saaresta.

H: Jokaista klubia K kohti on olemassa toinen klubi L siten, että jokaisella klubin L jäsenellä on ainakin yksi kaveri klubissa K ja jokaisella saaren asukkalla, joka ei ole klubin L jäsen, on ainakin yksi kaveri, joka ei ole klubin K jäsen.

Tämän tosiasian jälkeen Sherlock Holmes pystyi päättelemään onko hän Gödelin saarella.

Onko hän?

Ratkaisu:

Merkitään saaren asukkaita $\mathcal{S}$ ja kaikkien klubien joukkoa $\mathscr{K} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$. Asetetaan myös relaatio $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ siten, että $A\mathcal{F}B$ jos ja vain jos $A \in \mathcal{S}$ väittää, että $B \in \mathcal{S}$ on seurallinen.

Olkoon sitten $\mathcal{K} \in \mathscr{K}$ klubi. Ehto H antaa klubin $\mathcal{L} \in \mathscr{K}$. Tällöin on olemassa joku $\ell \in \mathcal{S}$ siten, että $\mathcal{L}$ on nimetty asukkaan ℓ mukaan. Jos $\ell \in \mathcal{L}$, niin tällöin ℓ on seurallinen. Lisäksi ehdon H mukaan on olemassa $k \in \mathcal{K}$ siten, että $k\mathcal{F}\ell$. Koska ℓ on seurallinen, k:n väite kaveruudesta on totta joten k on rehti. Koska $k \in \mathcal{K}$, rehtinä hän väittää olevansa klubin $\mathcal{K}$ jäsen.

Jos taas $\ell \notin \mathcal{L}$, niin ehdon H mukaan hänellä on kaveri, joka ei kuulu klubiin $\mathcal{K}$ eli on olemassa $m \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$ siten, että $m\mathcal{F}\ell$. Kuitenkin $\ell \notin \mathcal{L}$ eli ℓ on arka. Koska m väittää, että ℓ olisikin seurallinen, m on retku. Koska $m \notin \mathcal{K}$, m väittää retkuna kuuluvansa klubiin $\mathcal{K}$.

Näin ollen mielivaltaiselle klubille $\mathcal{K}$ löydettiin aina asukas $s \in \mathcal{S}$, joka väittää kuuluvansa klubiin $\mathcal{K}$. Ehto G siis toteutuu ja Sherlock Holmes on Gödelin saarella.