## Tehtävä 1

Vastaa kurssikyselyyn. Linkki kurssikyselyyn lähetetään sähköpostilla keskiviikkona 17.6.2020.

**Ratkaisu:**

*Vastattu.*

## Tehtävä 2

Anna luonnollinen päättely $\{\neg\exists x_1 \neg A\} \vdash \forall x_1 A$.

**Ratkaisu:**

Tehdään tilapäinen oletus $\neg A$. Tuomalla eksistenssikvanttori saadaan $\exists x_1 \neg A$, jolloin käyttämällä oletusta $\neg\exists x_1 \neg A$ ja konjunktion tuontia saadaan ristiriita $\exists x_1 \neg A \wedge \neg\exists x_1 \neg A$. Negaation tuonnilla saadaan siten $\neg\neg A$ ja samalla hylätään $\neg A$. Negaation eliminoinnilla saadaan $A$, jolloin tuomalla universaalikvanttori saadaan $\forall x_1 A$. Formaalisti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1}{\exists x_1 \neg A}\,\exists_T \qquad \neg\exists x_1 \neg A}{\exists x_1 \neg A \wedge \neg\exists x_1 \neg A}\,\wedge_T}{\neg\neg A}\,\neg_{T,1}}{A}\,\neg_E}{\forall x_1 A}\,\forall_T$$

## Tehtävä 3

Anna luonnollinen päättely $\{\forall x_1(A \lor \neg B), \exists x_1 \neg A\} \vdash \exists x_1 \neg B$.

**Ratkaisu:**

Eräs selkeä tapa lähteä rakentamaan ratkaisua on käyttää jo aiemmin hankittuja tuloksia (aiemmin tällä kurssilla tai muuten vain matematiikassa) ja kasata niistä luonnollinen päättely. Huomataan esimerkiksi, että $A \lor \neg B \equiv B \to A$, $\exists x_1 \neg B \equiv \neg\forall x_1 B$ ja $\neg B \to \neg A \equiv A \to B$, missä $\equiv$ kuvaa ekvivalenssia jossain sopivassa mielessä. Nyt siis $\{A \lor \neg B\} \vdash (\neg A \to \neg B)$ formaalisti[1]:

$$\dfrac{\dfrac{A \lor \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [\neg A]^2}{A \land \neg A}\,\land_T}{\neg B}\,\neg_T \qquad [\neg B]^1}{\neg B}\,\lor_{E,1}}{\neg A \to \neg B}\,\to_{T,2}$$

Seuraavaksi $\{\neg A \to \neg B\} \vdash \{B \to A\}$ (H2/T4):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2 \qquad \dfrac{\neg A \to \neg B \qquad [\neg A]^1}{\neg B}\,\to_E}{B \land \neg B}\,\land_T}{\neg\neg A}\,\neg_{T,1}}{A}\,\neg_E}{B \to A}\,\to_{T,2}$$

Sitten $\{\forall x_1(B \to A), \exists x_1 \neg A\} \vdash \neg\forall x_1 B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_1(B \to A)}{B \to A}\,\forall_E \qquad \dfrac{[\forall x_1 B]^3}{B}\,\forall_E}{A}\,\to_E}{\forall x_1 A}\,\forall_T \qquad \dfrac{\exists x_1 \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x_1 A]^1}{A}\,\forall_E \qquad [\neg A]^2}{A \land \neg A}\,\land_T}{\neg\forall x_1 A}\,\neg_{T,1}}{\neg\forall x_1 A}\,\exists_{E,2}}{\forall x_1 A \land \neg\forall x_1 A}\,\land_T}{\neg\forall x_1 B}\,\neg_{T,3}$$

[1] En jaksa kirjoittaa päättelyitä sanallisesti auki näille kaikille. . .

Lopulta $\{\neg\forall x_1 B\} \vdash \exists x_1 \neg B$ (Esimerkki 5.7):

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg B]^1$}
\RightLabel{$\exists_T$}
\UnaryInfC{$\exists x_1 \neg B$}
\AxiomC{$[\neg \exists x_1 \neg B]^2$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$\exists x_1 \neg B \wedge \neg \exists x_1 \neg B$}
\RightLabel{$\neg_{T,1}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{$\neg_E$}
\UnaryInfC{$B$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_1 B$}
\AxiomC{$\neg \forall x_1 B$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$\forall x_1 B \wedge \neg \forall x_1 B$}
\RightLabel{$\neg_{T,2}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg \exists x_1 \neg B$}
\RightLabel{$\neg_E$}
\UnaryInfC{$\exists x_1 \neg B$}
\end{prooftree}
$$

Tämä ratkaisutapa “kostautuu” kuitenkin nyt, kun nämä palat pitäisi yhdistää eli näyttää, että $\{\forall x_1(A \vee \neg B), \exists x_1 \neg A\} \vdash \exists x_1 \neg B$. Tuloksena on seuraava sotku:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg B]^8$}
\RightLabel{$\exists_T$}
\UnaryInfC{$\exists x_1 \neg B$}
\AxiomC{$[\neg \exists x_1 \neg B]^9$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$\exists x_1 \neg B \wedge \neg \exists x_1 \neg B$}
\RightLabel{$\neg_{T,8}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{$\neg_E$}
\UnaryInfC{$B$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_1 B$}
\AxiomC{$\forall x_1 (A \vee \neg B)$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg B$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$A \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\neg_T$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\AxiomC{$[\neg B]^1$}
\RightLabel{$\vee_{E,1}$}
\TrinaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{$\rightarrow_{T,2}$}
\UnaryInfC{$\neg A \rightarrow \neg B$}
\AxiomC{$[\neg A]^3$}
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$\neg B$}
\AxiomC{$[B]^4$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$B \wedge \neg B$}
\RightLabel{$\neg_{T,3}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\neg_E$}
\UnaryInfC{$A$}
\RightLabel{$\rightarrow_{T,4}$}
\UnaryInfC{$B \rightarrow A$}
\AxiomC{$[\forall x_1 B]^7$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$B$}
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$A$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_1 A$}
\AxiomC{$\exists x_1 \neg A$}
\AxiomC{$[\forall x_1 A]^5$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$A$}
\AxiomC{$[\neg A]^6$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$A \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\neg_{T,5}$}
\UnaryInfC{$\neg \forall x_1 A$}
\RightLabel{$\exists_{E,6}$}
\BinaryInfC{$\neg \forall x_1 A$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$\forall x_1 A \wedge \neg \forall x_1 A$}
\RightLabel{$\neg_{T,7}$}
\UnaryInfC{$\neg \forall x_1 B$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$\forall x_1 B \wedge \neg \forall x_1 B$}
\RightLabel{$\neg_{T,9}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg \exists x_1 \neg B$}
\RightLabel{$\neg_E$}
\UnaryInfC{$\exists x_1 \neg B$}
\end{prooftree}
$$

## Tehtävä 4

(a) Muuta seuraava ajatuksenjuoksu predikaatilogiikan kielelle.

"Kaikki nyrkkeilijät ovat vahvoja. Jotkut poliisit eivät ole vahvoja. Siis jotkut poliisit eivät ole nyrkkeilijöitä."

(b) Onko (a)-kohdan ajatuksenjuoksu loogisesti pätevä? Perustele vastauksesi.

**Ratkaisu:**

(a) Merkitään

$$\begin{aligned} P_1(x) &: \text{“}x \text{ on nyrkkeilijä”}, \\ P_2(x) &: \text{“}x \text{ on vahva”}, \\ P_3(x) &: \text{“}x \text{ on poliisi”}. \end{aligned}$$

Tällöin "kaikki nyrkkeilijät ovat vahvoja" vastaa kaavaa $\forall x(P_1(x) \to P_2(x))$, "jotkut poliisit eivät ole vahvoja" tarkoittaa, että on olemassa poliisi, joka ei ole vahva, eli $\exists x(P_3(x) \wedge \neg P_2(x))$. "Jotkut poliisit eivät ole nyrkkeilijöitä" puolestaan tarkoittaa, että on olemassa poliisi, joka ei ole nyrkkeilijä, eli $\exists x(P_3(x) \wedge \neg P_1(x))$. Yhdistämällä nämä saadaan

$$(\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_2(x))) \to \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_1(x)).$$

(b) Osoitetaan, että

$$\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_2(x))) \implies \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_1(x)$$

eli että jokaisella mallilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintakuvauksella $s$, joilla

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_2(x))),$$

niin myös

$$\mathcal{M} \vDash_s \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_1(x)).$$

Olkoon siis $\mathcal{M}$ malli ja $s$ $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus niin, että

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_2(x))).$$

Tarskin totuusmääritelmän perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x/a)} (P_1(x) \to P_2(x))$$

ja jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x/b)} (P_3(x) \wedge \neg P_2(x))$$

eli kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, jos $a \in P_1^{\mathcal{M}}$, niin $a \in P_2^{\mathcal{M}}$, sekä jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $b \in P_3^{\mathcal{M}}$ ja $b \notin P_2^{\mathcal{M}}$. Nyt $b \notin P_1^{\mathcal{M}}$, sillä jos olisi $b \in P_1^{\mathcal{M}}$, niin tällöin ehdon "kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee, että jos $a \in P_1^{\mathcal{M}}$, niin $a \in P_2^{\mathcal{M}}$" perusteella olisi $b \in P_2^{\mathcal{M}}$. Siispä jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $b \in P_3^{\mathcal{M}}$ ja $b \notin P_1^{\mathcal{M}}$.

Tarskin totuusmääritelmästä saadaan, että jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $b \in P_3^{\mathcal{M}}$ ja $b \notin P_1^{\mathcal{M}}$ jos ja vain jos jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x/b)} (P_3(x) \wedge \neg P_1(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{M} \vDash_{s} \exists x(P_3(x) \wedge \neg P_1(x)).$$

Näin ollen (a)-kohdan päättely on loogisesti pätevä.

## Tehtävä 5

Olkoon $L = \{c_1, P_1^1, P_2^2\}$. Osoita, että $L$-teoria, jonka aksioomat ovat

$$\begin{aligned}
&\forall x_1 P_1^1(x_1)\\
&\exists x_1(P_1(x_1) \leftrightarrow P_2^2(x_1, c_1))\\
&\forall x_1 \forall x_2(\neg P_2^2(x_1, x_2) \vee P_2^2(x_2, x_1))\\
&\forall x_1 \neg P_2^2(c_1, x_1)
\end{aligned}$$

on ristiriitainen.

**Ratkaisu:**

Merkitään tehtävänannon $L$-teoriaa $T$ ja tehdään vastaoletus, että $T$ on ristiriidaton. Tällöin Lauseen 6.9 mukaan teorialla $T$ on malli $\mathcal{M}$, eli mielivaltaisella tulkintakuvauksella $s$ pätee

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models_s \forall x_1 P_1(x_1),\\
&\mathcal{M} \models_s \exists x_1(P_1(x_1) \leftrightarrow P_2(x_1, c_1)),\\
&\mathcal{M} \models_s \forall x_1 \forall x_2(\neg P_2(x_1, x_2) \vee P_2(x_2, x_1)),\\
&\mathcal{M} \models_s \forall x_1 \neg P_2(c_1, x_1).
\end{aligned}$$

Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\mathcal{M} \models_s \forall x_1 P_1(x_1)$$

jos ja vain jos kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$a \in P_1^{\mathcal{M}}.$$

Vastaavasti

$$\mathcal{M} \models_s \exists x_1(P_1(x_1) \leftrightarrow P_2(x_1, c_1))$$

jos ja vain jos jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/b)} (P_1(x_1) \leftrightarrow P_2(x_1, c_1))$$

jos ja vain jos jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee, että $b \in P_1^{\mathcal{M}}$ jos ja vain jos $(b, s(c_1)) \in P_2^{\mathcal{M}}$. Puolestaan

$$\mathcal{M} \models_s \forall x_1 \forall x_2(\neg P_2(x_1, x_2) \vee P_2(x_2, x_1))$$

jos ja vain jos kaikilla $c, d \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \models_{s(x_1/c)(x_2/d)} (\neg P_2(x_1, x_2) \vee P_2(x_2, x_1))$$

jos ja vain jos kaikilla $c, d \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(c, d) \notin P_2^{\mathcal{M}}$ tai $(d, c) \in P_2^{\mathcal{M}}$. Lopuksi

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \neg P_2(c_1, x_1)$$

jos ja vain jos kaikilla $e \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(s(c_1), e) \notin P_2^{\mathcal{M}}$.

Keräämällä nämä yhteen saadaan, että kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $a \in P_1^{\mathcal{M}}$, jollakin $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $b \in P_1^{\mathcal{M}}$ jos ja vain jos $(b, s(c_1)) \in P_2^{\mathcal{M}}$, kaikilla $c, d \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(c, d) \notin P_2^{\mathcal{M}}$ tai $(d, c) \in P_2^{\mathcal{M}}$, sekä kaikilla $e \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(s(c_1), e) \notin P_2^{\mathcal{M}}$.

Koska kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $a \in P_1^{\mathcal{M}}$ ja $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, niin täytyy olla $(b, s(c_1)) \in P_2^{\mathcal{M}}$. Toisaalta, kun $e = b$, niin myös $(s(c_1), b)\ /P_2^{\mathcal{M}}$. Siispä $(b, s(c_1)) \in P_2^{\mathcal{M}}$ ja $(s(c_1), b) \notin P_2^{\mathcal{M}}$. Nyt kaikilla $c, d \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(c, d) \notin P_2^{\mathcal{M}}$ tai $(d, c) \in P_2^{\mathcal{M}}$, joten erityisesti tämä pätee, kun $c = b$ ja $d = s(c_1) \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Kuitenkin edellä nähtiin, että näin ei voi olla. Päädyttiin siis ristiriitaan, joten antiteesi on väärin. Siispä $T$ on ristiriitainen.

## Tehtävä 6

Ekvivalenssirelaatioiden teorian $T_\sim$ aakkostona on $L = \{P\}$, missä $P$ on kaksipaikkainen predikaattisymboli. Teorian aksioomat ovat

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 P(x_1, x_1) && \text{(refleksiivisyys)}\\
&\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)) && \text{(symmetrisyys)}\\
&\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((P_{(}x_1, x_2) \wedge P_{(}x_2, x_3)) \to P_{(}x_1, x_3)) && \text{(transitiivisuus)}
\end{aligned}
$$

Näytä, että teorian aksioomat eivät ole ristiriitaiset.

**Ratkaisu:**

Osoitetaan aluksi seuraava väite: *jos on olemassa malli $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus $s$ siten, että $\mathcal{S} = \{A : \mathcal{M} \vDash_s A\}$, niin tällöin $\mathcal{S}$ on ristiriidaton.*

Olkoon siis $\mathcal{M}$ malli ja $s$ $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus ja $\mathcal{S} = \{A : \mathcal{M} \vDash_s A\}$. Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{S}$ on ristiriitainen. Tällöin määritelmän perusteella on olemassa lause $B$ siten, että $\mathcal{S} \vdash B \wedge \neg B$. Eheyslauseen nojalla $\mathcal{S} \implies B \wedge \neg B$. Tarskin totuusmääritelmän perusteella

$$\mathcal{M} \vDash_s B \wedge \neg B$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{M} \vDash_s B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \nvDash_s B.$$

Koska edellinen ei ole koskaan totta, niin jotta olisi $\mathcal{S} \implies B \wedge \neg B$, täytyy olla

$$\mathcal{M} \nvDash_s \mathcal{S}$$

eli

$$\mathcal{M} \nvDash_s A_1 \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \nvDash_s A_2 \quad \text{ja} \quad \cdots .$$

Tämä on kuitenkin ristiriita kokoelman $\mathcal{S}$ määritelmän kanssa. Näin ollen $\mathcal{S}$ on ristiriidaton.

Edellisen perusteella riittää löytää malli $\mathcal{M}$ ja tulkintakuvaus $s$ siten, että

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 P(x_1, x_1),\\
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)),\\
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3)) \to P(x_1, x_3)).
\end{aligned}
$$

Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 P(x_1, x_1)$$

jos ja vain jos kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/a)} P(x_1, x_1)$$

eli jos kaikilla $a$ pätee $(a, a) \in P^{\mathcal{M}}$. Vastaavasti

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$$

jos ja vain jos kaikilla $b, c \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/b)(x_2/c)} (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$$

eli jos kaikilla $b, c$ pätee, että jos $(b, c) \in P^{\mathcal{M}}$, niin myös $(c, b) \in P^{\mathcal{M}}$. Lisäksi

$$\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3)) \to P(x_1, x_3))$$

jos ja vain jos kaikilla $d, e, f \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$\mathcal{M} \vDash_{s(x_1/d)(x_2/e)(x_3/f)} (P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3))$$

eli jos kaikilla $d, e, f$ pätee, että jos $(d, e) \in P^{\mathcal{M}}$ ja $(e, f) \in P^{\mathcal{M}}$, niin myös $(d, f) \in P^{\mathcal{M}}$.

Yhdistämällä edellä saadut saadaan siis, että mallin $\mathcal{M}$ täytyy toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b, c, d, e, f \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned}
&(a, a) \in P^{\mathcal{M}} \\
&\text{jos } (b, c) \in P^{\mathcal{M}}, \text{ niin } (c, b) \in P^{\mathcal{M}} \\
&\text{jos } (d, e) \in P^{\mathcal{M}} \text{ ja } (e, f) \in P^{\mathcal{M}}, \text{ niin } (d, f) \in P^{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $\mathcal{M}$ malli siten, että $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0\}$ ja $s$ mikä tahansa $\mathcal{M}$-tulkintakuvaus. Asetetaan lisäksi $P^{\mathcal{M}} = \{(0, 0)\}$. Tällöin kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $(a, a) \in P^{\mathcal{M}}$. Kaksi muuta ehtoa toteutuvat triviaalisti. Näin ollen löydettiin malli $\mathcal{M}$ ja tulkintakuvaus $s$ siten, että

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 P(x_1, x_1), \\
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)), \\
&\mathcal{M} \vDash_s \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3)) \to P(x_1, x_3)),
\end{aligned}$$

josta väite seuraa.

## Tehtävä 7

(a) Olkoon $A$ kaava $(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3))$ ja $B$ kaava $(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2))$. Anna luonnollinen päättely

$$\{(A \to P(x_1,x_3)), \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \to P(x_2,x_1))\} \vdash (B \to P(x_1,x_3)).$$

(b) Anna luonnollinen päättely $T_\sim \vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \to P(x_1,x_3))$ tehtävässä 6 esitellyssä ekvivalenssirelaatioiden teoriassa $T_\sim$.

**Ratkaisu:**

(a) Käytetään oletusta $\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \to P(x_2,x_1))$ ja eliminoidaan universaalikvanttori $\forall x_1$ ja tehdään sijoitus $(x_1/x_3)$. Tällöin saadaan $\forall x_2 (P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3))$, jolloin jälleen universaalikvanttorin eliminoinnilla saadaan $P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3)$. Toisaalta, tekemällä tilapäinen oletus $B$ saadaan konjunktion eliminoinnilla $P(x_3,x_2)$, jolloin käyttämällä implikaation eliminointia edelliseen tulokseen saadaan $P(x_2,x_3)$. Tilapäisestä oletuksesta $B$ saadaan konjunktion eliminoinnilla myös $P(x_1,x_2)$, jolloin tuomalla konjunktio saadaan $P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)$ eli $A$. Käyttämällä oletusta $A \to P(x_1,x_3)$ ja implikaation eliminointia saadaan $P(x_1,x_3)$, johon tuomalla implikaatio saadaan $B \to P(x_1,x_3)$. Samalla voidaan hylätä oletus $B$. Formaalisti:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \to P(x_1,x_3)$}
\AxiomC{$[B]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_1,x_2)$}
\AxiomC{$\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \to P(x_2,x_1))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$\forall x_2 (P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3)$}
\AxiomC{$[B]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2)$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$P(x_2,x_3)$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$A$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\to_{T,1}$}
\UnaryInfC{$B \to P(x_1,x_3)$}
\end{prooftree}
$$

Vielä formaalimmin (korvataan $A$ ja $B$ niitä vastaavilla kaavoilla):

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)) \to P(x_1,x_3)$}
\AxiomC{$[(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2))]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_1,x_2)$}
\AxiomC{$\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \to P(x_2,x_1))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$\forall x_2 (P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2) \to P(x_2,x_3)$}
\AxiomC{$[(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2))]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2)$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$P(x_2,x_3)$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3))$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\to_{T,1}$}
\UnaryInfC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \to P(x_1,x_3)$}
\end{prooftree}
$$

(b) Huomataan, että teoriasta $T_\sim$ voidaan päätellä (a)-kohdan päättelyn oletukset universaalikvanttorin eliminoinnilla. Lisäksi (a)-kohdan johtopäätöksestä saadaan universaalikvanttorin tuonnilla haluttu johtopäätös. Formaalisti:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$\forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$\forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\AxiomC{$[(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2))]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_1,x_2)$}
\AxiomC{$\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \rightarrow P(x_2,x_1))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$\forall x_2 (P(x_3,x_2) \rightarrow P(x_2,x_3))$}
\RightLabel{$\forall_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2) \rightarrow P(x_2,x_3)$}
\AxiomC{$[(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2))]^1$}
\RightLabel{$\wedge_E$}
\UnaryInfC{$P(x_3,x_2)$}
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$P(x_2,x_3)$}
\RightLabel{$\wedge_T$}
\BinaryInfC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3))$}
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\rightarrow_{T,1}$}
\UnaryInfC{$(P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\RightLabel{$\forall_T$}
\UnaryInfC{$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_3,x_2)) \rightarrow P(x_1,x_3)$}
\end{prooftree}
$$

## Tehtävä 8

Anna esimerkki teoreemasta, joka ei ole validi kaava. Perustele vastauksesi.

**Ratkaisu:**

Olkoon $\mathcal{L}$ aakkosto ja $A$ $\mathcal{L}$-kaava. Olkoon $T = \{A, \neg A\}$ teoria. Tällöin triviaalilla päättelyllä

$$\frac{A \qquad \neg A}{A \wedge \neg A} \wedge_T$$

saadaan, että $T \vdash A \wedge \neg A$ eli että $A \wedge \neg A$ on teorian $T$ teoreema. $A \wedge \neg A$ ei kuitenkaan ole validi kaava, sillä jokaisella mallilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintakuvauksella $s$ pätee Tarskin totuusmääritelmän nojalla $\mathcal{M} \models_s A \wedge \neg A$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \not\models_s A$, mikä ei ole mahdollista.

## *Tehtävä 9

Osaatko lukea koko tehtävänannon?

**Ratkaisu:**

~~Kyllä~~ *jee ja joo*