Tehtävä 1

Totta vai Tarua? Lyhyt perustelu tai vastaesimerkki!

(a) Jokainen jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.
(b) Jokainen jatkuva funktio $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.
(c) Jokainen jatkuva funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.

Ratkaisu:

(a) Väite on tarua. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. f on polynomina jatkuva, mutta Esimerkin 7.1.6 mukaan f ei ole tasaisesti jatkuva.

(b) Väite on tarua. Olkoon $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Olkoon myös $\varepsilon = 1$ ja valitaan jonot $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ja $z_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Nyt

$$x_n - z_n = 1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Kuitenkin

$$|f(x_n) - f(z_n)| = |-n + n + 1| = 1 \geq \varepsilon$$

eli f ei ole tasaisesti jatkuva välillä $[0, 1[$.

(c) Väite on totta Lauseen 7.1.9 nojalla.

Tehtävä 3

Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, on tasaisesti jatkuva reaalilukujen joukossa.

Ratkaisu:

Sinin summatulosta saadaan, että

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Valitaan $\delta = \varepsilon$, jolloin

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\sin x - \sin y| \\
&\leq \left| 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
&= 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \\
&= |x - y| < \delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$. Siispä $\sin x$ on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}$:ssä ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 5

Osoita, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on tasaisesti jatkuva reaalilukujen joukossa.

Ratkaisu:

Kun $|x| \leq 1$, f on tasaisesti jatkuva välillä $[-1, 1]$ Lauseen 7.1.9 ja rationaalifunktion jatkuvuuden perusteella.
Olkoot siis $|x| > 1$, $|y| > 1$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, jolloin

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| \\
&= \left| \frac{x^2 - y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \\
&\leq \frac{|x| + |y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \, |x - y| \\
&\leq \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{1+y^2}{1+y^2} \right) |x - y| \\
&= 2\,|x - y| < 2\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $|x - y| < \delta$.
Siispä f on tasaisesti jatkuva myös välillä $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, joten f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 9

Osoita, että $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$, ei ole tasaisesti jatkuva joukossa $]0, \infty[$.

Ratkaisu:

Olkoot $x_n = \frac{3}{n} \subset]0, \infty[$ ja $z_n = \frac{1}{n} \subset]0, \infty[$ jonoja ja $\varepsilon = 1$. Nyt

$$x_n - z_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.
Kuitenkin

$$f(x_n) - f(z_n) = \log\frac{3}{n} - \log\frac{1}{n} = \log\left(\frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \log 3 \geq 1 = \varepsilon.$$

Nyt Lemman 7.1.8 perusteella $f(x) = \log x$ ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0, \infty[$.

Tehtävä 12

Olkoon $f :]0,\infty[$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Osoita, että f ei ole tasaisesti jatkuva joukossa $]0,\infty[$.

Ratkaisu:

Olkoot $x_n = \frac{1}{2\pi n} \subset]0,\infty[$, $z_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \subset]0,\infty[$ jonoja ja $\varepsilon = 1$. Selvästi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n(4n+1)} = 0,$$

mutta

$$|f(x_n) - f(z_n)| = \left|\sin(2\pi n) - \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon,$$

joten Lemman 7.1.8 mukaan $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0,\infty[$.

Tehtävä 17

Anna esimerkit tasaisesti jatkuvista funktioista $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ siten, että niiden tulofunktio $h : A \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$, ei ole tasaisesti jatkuva joukossa A.

Ratkaisu:

Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = x$. f ja g ovat tasaisesti jatkuvia $\mathbb{R}$:ssä lineaariaffiineina funktioina Esimerkin 7.1.3 mukaan. Kuitenkin $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x) = x^2$, ei ole tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}$:ssä Esimerkin 7.1.6 mukaisesti.

Vastaus: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = x$.

Tehtävä 19

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$, ja $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ tasaisesti jatkuvia ja rajoitettuja funktioita joukossa A. Osoita, että $h : A \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$ on tasaisesti jatkuva joukossa A. (Vinkki: Kirjoita

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)].)$$

Ratkaisu:

Nyt

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= |f(x) - g(x) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)g(x) + f(x)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]| \\
&\leq |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)|\,.
\end{aligned}$$

Koska f ja g ovat rajoitettuja, $\exists\, M_f, M_g \geq 0$ siten, että $|f(x)| \leq M_f$ ja $|g(x)| \leq M_g$ kaikilla $x \in A$. Jos $M_f = 0$ tai $M_g = 0$ tai $M_f = M_g = 0$, tällöin $h(x) = f(x)$ tai $h(x) = g(x)$ tai $h(x) = 0$. Oletuksen mukaan f ja g ovat tasaisesti jatkuvia, ja $x \mapsto 0$ on vakiona myös tasaisesti jatkuva, jolloin myös h on tasaisesti jatkuva. Oletetaan siis, että $M_f, M_g > 0$.
Tasaisen jatkuvuuden oletuksesta saadaan myös, että $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_f, \delta_g > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \ \forall\, x, y \in A$, $|x - y| < \delta_f$ ja $|g(x) - g(y)| < \varepsilon\ \ \forall\, x, y \in A$, $|x - y| < \delta_g$.
Valitaan nyt $\delta = \max\{\delta_f, \delta_g\}$, jolloin

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &\leq |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| \\
&\leq M_f\,|g(x) - g(y)| + M_g\,|f(x) - f(y)| < M_f \cdot \frac{\varepsilon}{2M_f} + M_g \cdot \frac{\varepsilon}{2M_g} = \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in A$ joille $|x - y| < \delta$.
Siispä h on tasaisesti jatkuva joukossa A ja saatiin väite.

Tehtävä A2

Tutki jonon (z_n), missä

$$z_n = \frac{\cos(n\pi)}{n},$$

suppenemista Cauchyn suppenemiskriteerion avulla.

Ratkaisu:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Havaitaan, että $\cos(n\pi) = \pm 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Valitaan nyt $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$ ja oletetaan, että $m \geq n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|z_n - z_m| &= \left| \frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(m\pi)}{m} \right| \\
&\leq \frac{|\cos(n\pi)|}{n} + \frac{|\cos(m\pi)|}{m} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N_\varepsilon} = \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $m \geq n > N_\varepsilon$.
Siispä (z_n) on Cauchy-jono, joten Lauseen A.0.6 mukaan (z_n) suppenee.

Tehtävä A3

Oletetaan, että (x_n) on lukujono siten, että

$$|x_n - x_{n+1}| \leq 2^{-n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että (x_n) suppenee.

Ratkaisu:

Oletetaan, että $m \geq n$, jolloin $k = m - n \geq 0$. Jos $k = 1$, tällöin

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_{n+1}| \leq 2^{-n}.$$

Jos taas $k > 1$, saadaan kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |x_n - x_{n+k}| \\
&= |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+1} + \ldots + x_{n+k-1} - x_{n+k}| \\
&\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+1-1} - x_{n+k}| \\
&\leq 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+k-1)} \\
&\leq \sum_{k \geq n} 2^{-k} = \frac{2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Valitaan nyt $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $N_\varepsilon > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Nyt

$$|x_n - x_m| \leq 2^{-(n-1)} \leq 2^{-n} \leq 2^{-N_\varepsilon} < \frac{1}{2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}} = \varepsilon$$

ja siis (x_n) on Cauchy-jono ja siten Lauseen A.0.6 mukaan (x_n) suppenee.