Tehtävä 2

Olkoon

$$f : [0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,1] \\ 3 - x, n & \text{kun } x \in \left]1,2\right]. \end{cases}$$

Laske $F(x)$ kaikille $x \in [0,2]$, kunh $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ratkaisu:

f on paloittain jatkuvana funktioina integroituva.
Kun $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, niin $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{2}$.
Kun $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, niin $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{2}$.
Kun $x \in \left]1,2\right]$, niin $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{1} 1\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} (3-t)\,\mathrm{d}t = 3x - \frac{1}{2}x^2 - 2$. Tästä saadaan integraalifunktiolle lauseke

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 3x - \frac{1}{2}x^2 - 2x, & x \in \left]1,2\right]. \end{cases}$$

Vastaus: $F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 3x - \frac{1}{2}x^2 - 2x, & x \in \left]1,2\right]. \end{cases}$

Tehtävä 8

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x (t^2+3)\cos t\,\mathrm{d}t$$

käyttäen

(a) integraalilaskennan väliarvolausetta.
(b) L'Hôpitalin sääntöä.

Ratkaisu:

Olkoon $f, F : [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+3)\cos x$ ja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Nyt f on jatkuva jatkuvien funktioiden tulona.

(a) Integraalilaskennan väliarvolauseen mukaan $\exists\, c \in [0, x]$ siten, että

$$f(c) = \frac{1}{x-0}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x (t^2+3)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

f:n jatkuvuuden perusteella

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x (t^2+3)\cos t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f\left(\lim_{x\to 0^+} c\right).$$

Nyt $0 \le c \le x$, jolloin suppiloperiaatteella $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} c = 0$. Tällöin

$$f\left(\lim_{x\to 0^+} c\right) = f(0) = (0^2+3)\cos 0 = 3.$$

(b) Analyysin peruslauseen mukaan integraalifunktio F on derivoituva välillä $]0,\infty[$ siten, että $F'(x) = f(x)$. Lisäksi

$$F(0) = \int_0^0 f = 0,$$

$$\mathrm{D}(x) = 1 \neq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ja

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{\mathrm{D}(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f\left(\lim_{x\to 0^+} x\right) = f(0) = 3 \in \mathbb{R},$$

joten l'Hôpitalin säännön nojalla

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x (t^2+3)\cos t \,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{\mathrm{D}(x)} = 3.$$

Vastaus: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x (t^2+3)\cos t \,\mathrm{d}t = 3.$

Tehtävä 15

Saavuttaako funktio $F : [-3, 2[\to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{x^2-1} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

suurimman ja pienimmän arvonsa? Jos saavuttaa, niin missä pisteissä?

Ratkaisu:

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Olkoot lisäksi $E : [-1, 8] \to \mathbb{R}$, $E(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ ja $g : [-3, 2[\to [-1, 8]$, $g(x) = x^2 - 1$.

Osoitetaan, että $g\,([-3, 2[) = [-1, 8]$. Koska $x^2 \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, pätee $x^2 - 1 \geq -1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Nyt $g'(x) = 2x$, jolloin $g'(x) \geq 0\ \forall\, x \geq 0$ eli g on kasvava välillä $[0, 2[$ ja $g'(x)\ \leq 0\ \forall\, x \leq 0$ eli g on vähenevä välillä $[-3, 0]$. Lisäksi $g(-3) = 8 > 2^2 - 1 = 3$, joten g:n minimiarvo on -1 ja maksimiarvo on 8 välillä $[-3, 2[$, joten $g\,([-3, 2[) = [-1, 8]$.

Lauseen 8.2.2 mukaan F ja E ovat jatkuvia, joten ne saavuttavat minimi- ja maksimiarvonsa suljetulla välillä sekä kaikki arvot niiden välissä. Koska $g\,([-3, 2[) = [-1, 8]$, voidaan F:n minimi- ja maksimiarvojen saavuttaminen osoittaa funktion E avulla, sillä nämä funktiot saavuttavat kaikki samat arvot.

Analyysin peruslauseesta seuraa, että E on derivoituva siten, että $E'(x) = f(x) = e^{x^2}$, sillä f on jatkuva jatkuvien funktioiden yhdisteenä. Koska $E'(x) = e^{x^2} > 0\ \forall\, x \in [-1, 8]$, on E kasvava välillä $[-1, 8]$. Lisäksi E on jatkuva, jolloin kasvavuuden perusteella se saavuttaa pienimmän arvonsa välin alkupisteessä ja suurimman arvonsa välin loppupisteessä.

Näytettiin siis, että E saavuttaa pienemmän arvonsa pisteessä $x = -1$ ja suurimman arvonsa pisteessä $x = 8$. Todetaan lisäksi, että $g(0) = -1$ ja $g(-3) = 8$. Tällöin F saavuttaa pienemmän arvonsa $F(0)$ pisteessä $x = 0$ ja suurimman arvonsa $F(-3)$ pisteessä $x = -3$.

Lisäksi vain 0 totetuttaa yhtälön $g(0) = -1$ ja välillä $[-3, 2[$ vain -3 toteuttaa yhtälön $g(-3) = 8$, sillä ainoa toinen juuri $3 \notin [-3, 2[$. Siispä $x = 0$ ja $x = -3$ ovat F:n ainoat ääriarvokohdat.

Tehtävä 20

(a) Olkoon $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ derivoituva ja olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log f(x)$. Määritä derivaatta $g'(x)$.

(b) Osoita, että $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+7}\,\mathrm{d}x = \log 8 - \log 7$.

Ratkaisu:

(a) g on derivoituva kaikkialla derivoituvien funktioiden yhdisteenä. Koska $\mathrm{d}\log x = \frac{1}{x}$, saadaan ketjusäännöllä

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Vastaus: $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

(b) Olkoon $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$, $f(x) = x^4 + 7$. Nyt $x^4 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, joten $x^4 + 7 = f(x) \geq 7 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, jolloin $f(\mathbb{R}) \subset]0, \infty[$. Olkoon lisäksi $G : [0, 1] \to]0, \infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{4t^3}{t^4+7}\,\mathrm{d}t$. Analyysin peruslauseen mukaan G on derivoituva siten, että

$$G'(x) = \frac{4x^3}{x^4+7} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

sillä $x \mapsto \frac{4x^3}{x^4+7}$ on jatkuva jatkuvien funktioiden osamääränä. a-kohdan perusteella eräs mahdollinen G:n lausene on $G(x) = \log f(x)$, jolloin Analyysin peruslauseesta saadaan, että

$$\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+7}\,\mathrm{d}x = G(1) - G(0) = \log f(1) - \log f(0) = \log 8 - \log 7$$

ja saatiin väite.

Tehtävä 21

Etsi jatkuva funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\displaystyle\int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t = 2x^3 - x^4$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu:

Olkoon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Koska g:n täytyy olla jatkuva, myös tulo $t^2 g(t)$ on jatkuva. Tällöin Analyysin peruslauseesta saadaan, että F on derivoituva siten, että $F'(x) = x^2 g(x)$.

Asetetaan nyt $F'(x) = \mathrm{D}(2x^3 - x^4) \iff x^2 g(x) = 6x^2 - 4x^3$. Kun $x \neq 0$, saadaan $g(x) = 6 - 4x$. Havaitaan, että kun $x = 0$, yhtälö toteutuu edelleen, sillä $0^2(6 - 4x) = 0$. Olkoon siis $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6 - 4x$. g on polynomina jatkuva funktio ja

$$\int_0^x t^2(6 - 4t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 6t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^x 4t^3\,\mathrm{d}t = 2x^3 - x^4 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Valittu g täyttää siis kaikki annetut ehdot.

Vastaus: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6 - 4x$.

Tehtävä 23

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integroituva funktio. Osoita, että on olemassa $c \in [a, b]$ siten, että

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Vihje: Integraalifunktio ja Bolzanon lause.)

Ratkaisu:

Jos $\displaystyle\int_a^b f = 0$, pisteeksi c kelpaa $c = a$, sillä $\displaystyle\int_a^a f = 0 = \int_a^b f$. Tarkastellaan siis tilannetta, jossa $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$.

Merkitään $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \int_a^x f - \int_x^b f$. Lauseen 8.2.2 ja jatkuvuuden algebraallisten ominaisuuksien nojalla h on jatkuva. Lisäksi $h(a) = \displaystyle\int_a^a f - \int_a^b f = -\int_a^b f$ ja $h(b) = \int_a^b f - \int_b^b f = \int_a^b f$.

Nyt $h(a) = -h(b) \neq 0$, sillä $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$, jolloin löytyy Bolzanon lauseen perusteella $c \in \left]a, b\right[$ siten, että $h(c) = 0 \iff \displaystyle\int_a^c f = \int_c^b f$.

Löydettiin siis $c \in [a, b]$ siten, että $\displaystyle\int_a^c f = \int_c^b f$ ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 25

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle

$$f(0) = 2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}x^2 \leq f'(x) \ \leq x^2$$

kaikille $x \geq 0$. Arvio lukua $f(1)$

(a) DVAL:in
(b) Analyysin peruslauseen avulla.

Kumpi tapa antaa paremman arvion ja mistä ero mahtaa johtua?

Ratkaisu:

(a) DVAL:in perusteella $\exists\, c \in \,]0,1[$ siten, että

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 2.$$

Lisäksi saadaan, että

$$0 < \frac{1}{2}x^2 \leq f'(c) = f(1) - 2 < x^2 \leq 1 \implies 2 < f(1) < 3.$$

Vastaus: $f(1) \in \,]2,3[\,$.

(b) Koska f on jatkuvasti derivoituva, f' on integroituva ja siten on olemassa integraalifunktio $F : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = f(1) - f(0)$$

ja Lauseen 7.4.1 mukaan

$$\frac{1}{2}x^2 \leq f'(x) \leq x^2 \implies \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x,$$

josta saadaan $\frac{1}{6} \leq f(1) - f(0) = f(1) - 2 \leq \frac{1}{3} \iff \frac{13}{6} \leq f(1) \leq \frac{7}{3}$.

Vastaus: $f(1) \in \left[\dfrac{13}{6}, \dfrac{7}{3}\right]$.

Analyysin peruslause antaa selvästi paremman arvion $(3 - 2 = 1 > \frac{7}{3} - \frac{13}{6} = \frac{1}{6}$. En osaa sanoa tälle mitään yleispätevää tai tarkkaa syytä, ainoastaan sen, että derivaatta on "enemmän" pisteittäinen ominaisuus kuin integraali, joka "ottaa huomioon" koko välin $[0, 1]$, eikä ainoastaan pisteen $x = 1$ ympäristöä.

Tehtävä 26

Todista Lauseen 8.5.1 osittaisintegrointikaava.

Ratkaisu:

Olkoon $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivoituvia funktioita siten, että $f', g' : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia yli välin $[a, b]$. Määritellään $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. h on integroituva integroituvien funktioiden tulona ja summana. Olkoon lisäksi $H : [a, b] \to \mathbb{R}$, $H(x) = f(x)g(x)$. Nyt H on h:n primitiivi välillä $[a, b]$, sillä tulon derivaatan perusteella $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = h(x) \ \forall x \in [a, b]$.
Tällöin Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = H(x)\bigg|_a^b.$$

Toisaalta integraalin additiivisuuden perusteella

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tästä saadaan, että

$$H(x)\bigg|_a^b = f(x)g(x)\bigg|a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

jos ja vain jos

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\bigg|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ja saatiin väite.