Tehtävä 1

Tutki suppenevatko epäoleelliset integraalit

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,\mathrm{d}x.$

Ratkaisu:

(a) f on jatkuvana funktiona integroituva kaikilla väleillä $[a,c]\,, c>0$, jolloin osittaisintegroinnilla ja Analyysin peruslauseella saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_0^c f &= -e^{-3x}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\Bigg|_0^c = -e^{-3c}\left(\frac{c}{3}+\frac{1}{9}\right)+e^0\left(0+\frac{1}{9}\right)\\ &= -\frac{c}{3e^{3c}}-\frac{1}{9e^{3c}}+\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Raja-arvon laskusäännöillä

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c f = -\frac{1}{3}\lim_{c\to\infty}\frac{c}{e^{3c}}-\frac{1}{9}\lim_{c\to\infty}\frac{1}{e^{3c}}+\frac{1}{9}.$$

Lisäksi JMA2 perusteella $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^s}{e^x}=0\ \forall s\in\mathbb{R}$, joten

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c f = -\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{1}{9}\cdot 0+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\in\mathbb{R}.$$

Koska raja-arvo $\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_0^c f$ on olemassa äärellisenä, integraali $\displaystyle\int_0^\infty f$ suppenee.

Vastaus: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$ suppenee

(b) f on jatkuvana funktiona integroituva yli jokaisen välin $[0,c]\,, c\in\,]0,4[$. Muuttujanvaihdolla ja Analyysin peruslauseella saadaan, että

$$\int_0^c f = -2\sqrt{4-x}\,\Big|_0^c = -2\sqrt{4-c}+2\sqrt{4}=4-2\sqrt{4-c}.$$

Raja-arvon laskusääntöjen ja jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{c \to 4^-} \int_0^c f = 4 - 2\sqrt{4 - \lim_{c \to 4^-} c} = 4 \in \mathbb{R}.$$

Koska raja-arvo $\displaystyle\lim_{c \to 4^-} \int_0^c f$ on olemassa äärellisenä, integraali suppenee.

Vastaus: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Tehtävä 4

Laske epäoleelliset integraalit

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x.$

Ratkaisu:

(a) f on jatkuvana funktiona integroituva kaikilla väleillä $\left[a, \frac{\pi}{2}\right], a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, jolloin sijoitusintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{\pi}{2}} f = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{D}\sin x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sin(a)}^{\sin(\pi/2)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\ &= 2\sqrt{t}\,\Big|_{\sin(a)}^{1} = 2 - 2\sqrt{\sin(a)}, a \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.\end{aligned}$$

Tällöin raja-arvon laskusääntöjen ja jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{2}} f = 2 - 2\sqrt{\sin\left(\lim_{a\to 0^+} a\right)} = 2 \in \mathbb{R}.$$

Siispä integraali suppenee ja $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = 2.$

Vastaus: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = 2.$

(b) f on jatkuvana funktiona integroituva kaikilla väleillä $[a, 1], a \in]0, 1[$. Osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned}\int_a^1 f = \int_a^1 \log x \mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x &= x\log x\Big|_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \log 1 - a\log a - x\Big|_a^1 = -a\log a - 1 + a.\end{aligned}$$

Raja-arvon laskusäännöillä ja jatkuvuudella saadaan, että

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f = -\lim_{a\to 0^+} (a\log a) - 1.$$

JMA2 perusteella $\lim\limits_{a\to 0^+} a\log a = 0$, joten $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 f = -1$.

Vastaus: $\int_0^1 \log x \, \mathrm{d}x = -1$.

Tehtävä 7

Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

Ratkaisu:

Olkoot $f, g : [1,\infty[\to [0,\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ ja $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$. f ja g ovat ei-negatiivisia ja jatkuvina funktiona integroituvia yli jokaisen välin $[1,c]$, $c > 1$. Lisäksi

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \frac{1}{x\sqrt{2}} = g(x) \geq 0 \;\forall x \geq 1.$$

Esimerkin 1.1.2.b perusteella $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, joten myös $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Tällöin integraalitestin nojalla myös $\displaystyle\int_1^\infty f$ hajaantuu.

Vastaus: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Tehtävä 13

Tutki suppenevatko integraalit

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-3x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(Vihje: l'Hôpitalin sääntö)

Ratkaisu:

(a) Olkoon $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{-kx}}{x}$, $k \in \mathbb{N}$. f on jatkuvana funktiona integroituva kaikilla väleillä $[a,1]$, $a \in]0,1[$. Eksponenttifunktion jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{kx} = e^0 = 1 \in]0,\infty[\ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esimerkin 1.2.2 perusteella $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, joten osamäärätestin nojalla $\displaystyle\int_0^1 f$ hajaantuu. Nyt siis $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-kx}}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu $\forall k \in \mathbb{N}$, joten erityisesti integraalit $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-3x}}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuvat.

Vastaus: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-3x}}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuvat.

(b) Olkoon $g :]0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}$. g on jatkuvana funktiona integroituva kaikilla väleillä $[a,1]$, $a \in]0,1[$. Eksponenttifunktion jatkuvuuden ja raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{g'(x)}{\mathrm{D}(1/\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{3e^{-3x}-2e^{-2x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{2\sqrt{x}}_{\to 0}\underbrace{(3e^{-3x}-2e^{-2x})}_{\to 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'Hôpitalin säännön nojalla $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{1/\sqrt{x}} = 0$. Lisäksi Esimerkin 1.2.2 perusteella $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee, jolloin osamäärätestin nojalla $\displaystyle\int_0^1 g$ suppenee.

Vastaus: $\int_0^1 \frac{3e^{-3x} - 2e^{-2x}}{x} \, \mathrm{d}x$ suppenee.

Tehtävä 17

Tutki millä parametrien $s \in \mathbb{R}$ arvoilla integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Ratkaisu:

Olkoon $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log x}{x^s}$, $s \in \mathbb{R}$. f on jatkuvana funktiona integroituva jokaisella välillä $[a,1]$, $a \in]0,1[$. Jos $s = 1$, saadaan sijoitusintegroinnilla

$$\int_a^1 \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log a}^{\log 1} t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\bigg|_{\log a}^{0} = -\frac{\log^2 a}{2}.$$

Tällöin

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{\log^2 a}{2}\right) = -\infty$$

eli integraali hajaantuu.
Jos taas $s \neq 1$, saadaan osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned}
\int_a^1 \frac{\log x}{x^s}\,\mathrm{d}x &= \int_a^1 \log x\,\mathrm{D}\left(\frac{x^{1-s}}{1-s}\right)\mathrm{d}x \\
&= \log x\,\frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_a^1 - \int_a^1 \frac{x^{1-s}}{x(1-s)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^{1-s}\log a}{s-1} - \frac{1}{1-s}\int_a^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{s-1}\left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_a^1 \\
&= \frac{a^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{1-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s}\right) \\
&= \frac{a^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{a^{1-s}}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

Raja-arvon laskusäännöillä

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{a^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{a^{1-s}}{(s-1)^2}\right) &= \lim_{a\to 0^+}\frac{a^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}+\lim_{a\to 0^+}\frac{a^{1-s}}{(s-1)^2} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{(s-1)^2}, & s<1 \\ \infty, & s>1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Siispä integraali suppenee, kun $s<1$.

Vastaus: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee, kun $s<1$.

Tehtävä 19

Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(5x+1)^7}{x^9}\,\mathrm{d}x$.

Ratkaisu:

Olkoon $f : [1,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(5x-1)^7}{x^9}$. f on jatkuvana funktiona integroituva kaikille väleillä $[1,c]$, $c > 1$. Lisäksi

$$0 \leq f(x) = \frac{(5x+1)^7}{x^9} \leq \frac{(5x+x)^7}{x^9} = \frac{6^7}{x^2},$$

sillä $x \geq 1$. Nyt $x \mapsto \frac{6^7}{x^2}$ on jatkuvana funktiona integroituva jokaisella välillä $[1,c]$ ja Esimerkin 1.2.2 perusteella $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ suppenee, joten myös $\displaystyle\int_1^\infty \frac{6^7}{x^2}\,\mathrm{d}x$ suppenee. Tällöin majoranttiperiaatteella myös $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(5x+1)^7}{x^9}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Vastaus: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(5x+1)^7}{x^9}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Tehtävä 24

Olkoot $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ja $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ei-negatiivisia ja jatkuvia funktioita siten, että integraali $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ hajaantuu ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Osoita, että myös integraali $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Ratkaisu:

f on jatkuvana funktiona integroituva yli jokaisen välin $[0, c]$, $c > 0$. Koska

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

pätee $\forall m > 0\ \exists M > 0$ siten, että

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq m\ \forall x \geq M.$$

Lisäksi $g(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$, saadaan, että $f(x) \geq g(x)m \geq 0\ \forall x \geq M$. Nyt

$$\int_0^\infty f(x)m\,\mathrm{d}x = m\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

hajaantuu, sillä

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

hajaantuu. Tällöin Lauseen 1.1.6.b perusteella

$$\int_M^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

hajaantuu, jolloin myös

$$\int_0^\infty f = \int_0^M f + \int_M^\infty f$$

hajaantuu ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 26

Olkoon $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle on olemassa raja-arvo $f_\infty \coloneqq \lim_{x\to\infty} f(x)$. Osoita, että

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0) - f_\infty)\log(\tfrac{b}{a}).$$

Ratkaisu:

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $ab \geq 0$, $a \neq 0$.
Jos $a = b$, saadaan additiivisuuden nojalla

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{f(az) - f(bz)}{z}\,\mathrm{d}z + \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{f(az) - f(bz)}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= 0 + 0 = 0 = (f(0) - f_\infty)\underbrace{\log(\tfrac{b}{a})}_{=0}.$$

Tarkastellaan siis tilannetta $a < b$. Olkoot nyt $0 < x < y$ ja $I : [0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$I(r) = \int_{ar}^{br} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

f:n jatkuvuuden ja jatkuvuuden algebraallisten ominaisuuksien nojalla $x \mapsto \frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ on jatkuva ja siten integroituva kaikilla väleillä $[x, y]$. Sijoitusintegroinnilla saadaan, kun $[\alpha, \beta] \subset [x, y]$, että

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(kx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{k\alpha}^{k\beta} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Tällöin integraalien additiivisuuden nojalla

$$\int_x^y \frac{f(az) - f(bx)}{z}\,\mathrm{d}z = \int_x^y \frac{f(az)}{z}\,\mathrm{d}z - \int_x^y \frac{f(bz)}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{ax}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{bx}^{by} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{bx}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{bx}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= I(x) - I(y).$$

Osoitetaan, että $\lim\limits_{x \to 0^+} I(x) = f(0)\log(\frac{b}{a})$. Nyt

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= f(0)\log(\tfrac{b}{a}) + J_1(x),
\end{aligned}
$$

missä

$$J_1(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Raja-arvon laskusääntöjen nojalla riittää osoittaa, että $\lim\limits_{x \to 0^+} J_1(x) = 0$. Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva, $\forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists \delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(0)| < \tilde{\varepsilon}\ \forall x \in \,]-\delta, \delta[$. Erityisesti löytyy $\delta > 0$ silloin, kun $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\log(b/a)} > 0$. Tällöin integraalien kolmioepäyhtälöllä

$$
\begin{aligned}
|J_1(x)| &\leq \int_{ax}^{bx} \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| \mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{\log(b/a)} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \varepsilon
\end{aligned}
$$

eli $\lim\limits_{x \to 0^+} J_1(x) = 0$, jolloin $\lim\limits_{x \to 0^+} I(x) = f(0)\log(\frac{b}{a})$.

Osoitetaan sitten, että $\lim\limits_{y \to \infty} I(y) = f_\infty \log(\frac{b}{a})$. Nyt

$$
\begin{aligned}
I(y) &= \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{ay}^{by} \frac{f_\infty}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - f_\infty}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= f_\infty \log(\tfrac{b}{a}) + J_2(y),
\end{aligned}
$$

missä

$$J_2(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - f_\infty}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Vastaavasti $\lim\limits_{y \to \infty} I(y) = f_\infty \log(\frac{b}{a}) \iff \lim\limits_{y \to \infty} J_2(y) = 0$. Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Koska $\lim\limits_{y \to \infty} f(y) = f_\infty$, $\forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists M > 0$ siten, että $|f(y) - f_\infty| < \tilde{\varepsilon}\ \forall y \geq M$. Erityisesti tämä pätee, kun $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\log(b/a)} > 0$. Tällöin integraalien kolmioepäyhtälöstä saadaan, että

$$|J_2(y)| \leq \int_{ay}^{by} \left| \frac{f(t) - f_\infty}{t} \right| \mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{\log(b/a)} \int_{ay}^{by} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Siispä $\lim\limits_{y\to\infty} J_2(y) = 0$ eli $\lim\limits_{y\to\infty} I(y) = f_\infty \log(\frac{b}{a})$.

Nyt siis $\lim\limits_{x\to 0^+} I(x) = f(0)\log(\frac{b}{a})$ ja $\lim\limits_{y\to\infty} I(y) = f_\infty \log(\frac{b}{a})$, jolloin

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{f(az) - f(bz)}{z} \, \mathrm{d}z + \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{f(az) - f(bz)}{z} \, \mathrm{d}z \\
&= \lim_{x\to 0^+} I(x) - I(1) + I(1) - \lim_{y\to\infty} I(y) \\
&= f(0)\log(\tfrac{b}{a}) - f_\infty \log(\tfrac{b}{a}) \\
&= (f(0) - f_\infty)\log(\tfrac{b}{a}).
\end{aligned}$$

Siispä $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x = (f(0) - f_\infty)\log(\frac{b}{a})$ ja väite on siten osoitettu.