Tehtävä 1

Tutki sarjan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1}{j^2+1}$$

suppenemista (a) Majorantti/Minorantti-, (b) osamäärä- ja (c) suhdetestillä.

Ratkaisu:

Olkoot $a_j = \dfrac{j+1}{j^2+1}$ ja $b_j = \dfrac{1}{j}$. Tällöin $a_j > 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$.

(a) Kaikilla $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{j+1}{j^2+1} \geq \frac{j}{2j^2} = \frac{1}{2j}.$$

Lisäksi

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{\frac{1}{2j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{2j}{j} = 2 \in \left]0, \infty\right[$$

joten sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j}$ hajaantuu osamäärätestin nojalla, sillä harmoninen sarja hajaantuu. Tällöin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu minoranttiperiaatteella.

(b). Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\frac{1}{j}}{\frac{j+1}{j^2+1}} = \lim_{j\to\infty} \frac{j^2+1}{j(j+1)} = \lim_{j\to\infty} \frac{1+\frac{1}{j^2}}{1+\frac{1}{j}} = 1 \in \left]0, \infty\right[.$$

Koska $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ hajaantuu harmonisena sarjana, osamäärätestin nojalla myös $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

(c) Todetaan aluksi, että

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1+\frac{2}{j}}{1+\frac{1}{j}} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{1+\frac{1}{j^2}}{1+\frac{2}{j}+\frac{2}{j^2}} = 1.$$

Tällöin raja-arvon laskusäännöillä

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty}\frac{j+2}{j+1}\cdot\frac{j^2+1}{(j+1)^2+1} = \lim_{j\to\infty}\frac{1+\frac{2}{j}}{1+\frac{1}{j}}\cdot\frac{1+\frac{1}{j^2}}{1+\frac{2}{j}+\frac{2}{j^2}} = 1\cdot 1 = 1.$$

Suhdetestin raja-arvoversio ei siis anna tässä tilanteessa mitään tietoa.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j+1}{j^2+1}$ hajaantuu.

Tehtävä 3

Suppeneeko sarja?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$

Ratkaisu:

(a) Olkoon $a_k = \dfrac{k^2}{e^k}$. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^2}{e^{k+1}}}{\frac{k^2}{e^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{e^k}{e \cdot e^k} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{e}}_{\to 1/e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Tällöin suhdetestin nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$ suppenee.

(b) Olkoon $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$. Raja-arvon laskusäänöillä saadaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \underbrace{(2n+1)}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e} = \infty.$$

Suhdetestin nojalla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ hajaantuu.

Tehtävä 9

Osoita, että vuorotteleva sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \cdots$$

hajaantuu. Miksi Leibnizin testi ei toimi tässä vaikka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?
(Vihje: Viikon 2 Harjoitustehtävä 31).

Ratkaisu:

Sarja voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \cdots &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{(n+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Osamäärätestin nojalla sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ hajaantuu, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\to 1} \right)^2 = 1 \in \,]0, \infty[\, .$$

Tällöin myös sarja $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{(n+1)^2} \right)$ hajaantuu ja väite on siten osoitettu.
Leibnizin testiä ei voi soveltaa tähän tilanteeseen, sillä vuorottelevan sarjan termit eivät ole väheneviä, sillä $\frac{1}{2} > \frac{1}{2^2}$, mutta $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{3}$.

Tehtävä 12

Suppeneeko sarja? Entä itseisesti?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n}$

Ratkaisu:

(a) Olkoon $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$. Kosinin ominaisuuksien nojalla

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} \cos(2k\pi) = 1, & n = 2k \\ \cos(2k\pi - \pi) = -1, & n = 2k - 1 \end{cases} = (-1)^{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Siispä $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Merkitään nyt $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Selvästi $b_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$n \geq m \iff \sqrt{n} \geq \sqrt{m} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n \leq \frac{1}{\sqrt{m}} = b_m,$$

joten b_n on vähenevä. Myös $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, jolloin Leibnizin testin nojalla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Kuitenkin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ hajaantuu aliharmonisena sarjana.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ suppenee ehdollisesti.

(b) Olkoon $a_n = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n}$. Osoitetaan, että raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} a_n$ ei ole olemassa. Parillisten jäsenten osajonolle a_{2k} pätee

$$a_{2k} = -\frac{(2k+1)^{2k}}{2k} \leq -\frac{(2k)^{2k}}{2k} = (2k)^{2k-1} \xrightarrow{k\to\infty} -\infty,$$

jolloin suppiloperiaatteen nojalla $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = -\infty$. Vastaavasti parittomien osajonon jäsenille pätee

$$a_{2k-1} = -\frac{(2k)^{2k-1}}{2k-1} \geq -\frac{(2k-1)^{2k-1}}{2k-1} = (2k-1)^{2k-2} \xrightarrow{k\to\infty} \infty,$$

joten $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \infty$. Siispä alkuperäinen jono a_n hajaantuu myös. Tällöin myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n}$ hajaantuu.

Tehtävä 13

Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla seuraavat sarjat suppenevat?

(a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e^j}\right)^j$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{2^j j^2}$

Ratkaisu:

(a) Olkoot $a_j = \frac{x}{e^j}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{x^{j+1}}{e^{(j+1)^2}} \cdot \frac{e^{j^2}}{x^j}\right| = |x| \lim_{j\to\infty} \frac{e^{j^2}}{e^{(j+1)^2}}$$
$$= |x| \lim_{j\to\infty} \frac{1}{e^{2j+1}} = |x| \cdot 0 = 0 < 1.$$

Suhdetestin nojalla siis sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e^j}\right)^j$ suppenee $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e^j}\right)^j$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(b) Olkoot $a_j = \frac{(x-1)^j}{2^j j^2}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{j+1}}{2^{j+1}(j+1)^2} \cdot \frac{2^j j^2}{(x-1)^j}\right| = \frac{1}{2}|x-1| \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{j^2+2j+1}$$
$$= \frac{1}{2}|x-1| \lim_{j\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{j}+\frac{1}{j^2}} = \frac{1}{2}|x-1| < 1.$$

Saadun epäyhtälön ratkaisuksi saadaan $|x-1| < 2 \iff -1 < x < 3$. Suhdetestin nojalla siis sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee ainakin, kun $x \in \left]-1, 3\right[$. Suhdetesti ei kuitenkaan kerro mitään päätepisteistä, eli kun $|x-1| = 2$.

Todetaan ensin, että sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ suppenee itseisesti, sillä $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana. Tällöin alkuperäinen sarja suppenee myös välin $\left]-1, 3\right[$ päätepisteissä, sillä

$$x = -1 \implies \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n n^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

ja

$$x = 3 \implies \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{2^n n^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Siispä sarja suppenee, kun $x \in [-1, 3]$.

Vastaus: $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{2^j j^2}$ suppenee kaikilla $x \in [-1, 3]$.

Tehtävä 17

Todista seuraava suppenemistesti: Olkoot $a_n > 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(1/n)} = A > 1,$$

niin sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. (Tämän testin todisti alunperin Augustin Louis Cauchy yhdessä monien muiden suppenemistestien kanssa.)

Ratkaisu:

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(a_n)}{\log(1/n)} > 1$, raja-arvon määritelmän nojalla $\exists\, N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left| \frac{\log(a_n)}{\log(1/n)} - A \right| \leq \underbrace{\frac{A-1}{2}}_{>0} \;\forall\, n \geq N \iff \frac{A+1}{2} \leq \frac{\log(a_n)}{\log(1/n)} \leq 2A - 1 \;\; \forall\, n \geq N.$$

Merkitään nyt $k := \frac{A+1}{2} > 1$. Todetaan lisäksi, että $1/n \leq 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, joten $\log(1/n) \leq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Tällöin eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella saadaan, että

$$\begin{aligned} \frac{\log(a_n)}{\log(1/n)} \geq k &\iff \log(a_n) \leq k \log(1/n) \\ &\iff a_n \leq e^{k \log(1/n)} = \left(e^{\log(1/n)}\right)^k = \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

kaikilla $n \geq N$. Siispä $0 < a_n \leq 1/n^k \;\; \forall\, n \geq N$, jolloin majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ suppenee, sillä $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ suppenee yliharmonisena sarjana. Tällöin myös sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 21

Olkoot $a_n \geq 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $p > 1$. Osoita, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]^p.$$

(Vihje: Huomaa, että voi olettaa sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ summan olevan 1. Miksi?)

Ratkaisu:

Osoitetaan aluksi, että jos $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$, niin tällöin pätee $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n\right)^p$. Olkoon siis (q_n) lukujono siten, että $q_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$. Koska sarjan summa on 1 ja $q_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, sen osasummille pätee $0 \leq Q_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Tällöin lukujonon jäsenille pätee

$$0 \leq q_n = \underbrace{Q_n}_{\leq 1} - \underbrace{Q_{n-1}}_{\geq 0} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tästä seuraa, että $q_n^p \leq q_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, jolloin majoranttiperiaatteen ja oletuksen $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$ nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} q_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n\right)^p \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siispä $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n\right)^p$ pätee kaikille ei-negatiivisille lukujonoille, joille $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$.

Osoitetaan sitten, että väite pätee myös sarjoille, joiden summa ei välttämättä ole 1. Merkitään siis sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ summaa $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0, \infty[$. Jos $S = 0$, väite pätee suoraan, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = 0 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p = 0^p = 0.$$

Tarkastellaan siis tilannetta, jossa $S > 0$. Lukusarjojen lineaarisuuden nojalla $\frac{1}{S}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{a_n}{S} = 1$, jolloin aiemmin osoitetun nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{S}\right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S}\right)^p.$$

Tästä seuraa jälleen lineaarisuuden nojalla, että

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{S}\right)^p = \frac{1}{S^p}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq \frac{1}{S^p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S}\right)^p$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p$$

ja alkuperäinen väite on siten osoitettu.

Tehtävä 25

Olkoot $p, q \in \,]-1, 1[$. Muodosta geometristen sarjojen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Cauchyn tulo. Suppeneeko näin saatu sarja? Onko saatu sarja geometrinen?

Ratkaisu:

Lasketaan aluksi Cauchyn tulon termi c_n, kun $a_n = p^{n-1}$ ja $b_n = q^{n-1}$. Tällöin

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j+1} = \sum_{j=1}^{n} p^{j-1} q^{n-j} = \frac{q^n}{p} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^j$$

$$= \frac{q^n}{p} \cdot \frac{p}{q} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}}_{\text{geometrinen summa}} = q^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n}{1 - \frac{p}{q}}$$

$$= \frac{q^n}{q-p} \left(\frac{q^n - p^n}{q^n}\right) = \frac{p^n - q^n}{p - q}.$$

Siispä

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n - q^n}{p-q} = \frac{1}{p-q}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)$$

$$= \frac{1}{p-q}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-q}\right).$$

Geometrinen sarja suppenee itseisesti, jolloin Lauseen 3.3.4 nojalla myös niiden Cauchyn tulo suppenee itseisesti. Uusi sarja ei ole suoraan geometrinen sarja, mutta se voidaan kirjoittaa kahden geometrisen sarjan erotuksena.

Vastaus: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n - q^n}{p-q} = \frac{1}{p-q}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-q}\right).$