Tehtävä 3

Todista Lauseen 6.1.4 yleiset versiot:

(a) Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenee, kun $x = x_1$. Näytä, että tällöin potenssisarja suppenee itseisesti kaikille x, joille pätee $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

(b) Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ hajaantuu, kun $x = x_2$. Näytä, että tällöin potenssisarja hajaantuu kaikille x, joille pätee $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

Ratkaisu:

(a) Koska sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$$

suppenee, 0-testin perusteella

$$\lim_{j\to\infty} a_j(x-x_0)^j = 0$$

eli $\exists\, N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_j|\,|x-x_0|^j \leq 1 \;\; \forall\, j \geq N.$$

Kun $q := \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|$, pätee kaikilla $j \geq N$

$$|a_j|\,|x-x_0|^j = |a_j|\,|x_1-x_0|^j \left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^j \leq q^j.$$

Nyt $q < 1$, sillä $|x-x_0| < |x_1-x_0|$, joten majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{j=N}^{\infty} |a_j|\,|x-x_0|^j$ suppenee, koska geometrinen sarja $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ suppenee. Tällöin myös sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenee itseisesti ja väite on siten osoitettu.

(b) Tehdään vastaoletus, että on olemassa $x' \in \mathbb{R}$ siten, että $|x'-x_0| > |x_2-x_0|$ ja sarja

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x'-x_0)^j$ suppenee. Tällöin a-kohdan nojalla potenssisarja suppenee kaikilla x, joille $|x-x_0| < |x'-x_0|$. Kuitenkin $x_2 \in]x'-x_0, x'+x_0[$, joten a-kohdan mukaisesti potenssisarja suppenee pisteessä $x = x_2$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siispä antiteesti on tarua ja alkuperäinen väite on siten osoitettu.

Tehtävä 7

Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet

(a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^j x^j$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2} x_j$.

Missä joukossa sarjat suppenevat?

Ratkaisu:

Ehdin jo tekemään koko tehtävän ennen kuin huomasin, että pelkän suppenemissäteen etsiminen riittää, joten olen jättänyt ratkaisun myös suppenemisjoukon määrittämiseen.

(a) Merkitään $a_j = \left(1+\frac{1}{j}\right)^j$. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_j}{a_{j+1}}\right| = \lim_{j\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{j}\right)^j}{\left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j+1}} = \frac{e}{e} = 1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

joten Lauseen 6.1.11 nojalla suppenemissäde $R = 1$. Potenssisarjan keskus on $x_0 = 0$, jolloin Lauseen 6.1.9 perusteella sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^j x^j$ suppenee ainakin välillä $]-1,1[$.

Tarkastellaan suppenemista vielä erikseen välin päätepisteissä. Koska $\lim\limits_{j\to\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^j = e$, pätee molemmissa päätepisteissä

$$\lim_{j\to\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^j (\pm 1)^j \neq 0,$$

joten 0-testin nojalla sarja hajaantuu kun $x = \pm 1$. Siispä sarja suppenee joukossa $]-1,1[$.

Vastaus: sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^j x^j$ suppenee joukossa $]-1,1[$ suppenemissäteellä $R = 1$.

(b) Merkitään $a_j = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}$. Raja-arvon ja potenssien laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}\right)^{\frac{1}{j}}} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^j} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

joten Lauseen 6.1.11 mukaan suppenemissäde on $R = 1/e$. Lisäksi potenssisarjan keskus on $x_0 = 0$, joten Lauseen 6.1.9 perusteella sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}$ suppenee ainakin välillä $]-1/e, 1/e[$.

Tarkastellaan suppenemista vielä erikseen välin päätepisteissä. Nyt

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}\left(\pm\frac{1}{e}\right)^{j+1}}{a_j\left(\pm\frac{1}{e}\right)^{j}}\right| = \lim_{j\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{(j+1)^2}}{e^{j+1}}\frac{e^j}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{e}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j}\right)^{2}}_{=e^2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{j}\right)}_{=1} = e > 1,$$

joten suhdetestin nojalla sarja $\sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}(\pm e)^{-j}$ hajaantuu eli potenssisarja hajaantuu välin päätepisteissä.

Vastaus: sarja $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}x^j$ suppenee joukossa $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ suppenemissäteellä $R=\dfrac{1}{e}$.

Tehtävä 9

Määritä potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(3x+2)^n}{n+1}$$

keskus, kertoimet ja suppenemissäde. Missä joukossa sarja suppenee?

Ratkaisu:

Potenssisarja voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(3x+2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n+1} \left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^n,$$

josta nähdään suoraan, että potenssisarjan keskus on $x_0 = -\frac{2}{3}$. Kertoimet nähdään vastaavasti jälkimmäisestä muodosta, jolloin

$$a_n = \frac{n^2 3^n}{n+1}.$$

Raja-arvon laskusäännöillä

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

joten Lauseen 6.1.11 nojalla sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{3}$. Tällöin Lauseen 6.1.9 perusteella sarja suppenee ainakin välillä $\left]-1, -\frac{1}{3}\right[$. Tarkastellaan vielä suppenemista välin päätepisteissä. Kun $x = -1$, sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n (-1/3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$$

hajaantuu 0-testin nojalla, sillä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1} \neq 0$. Vastaavasti, kun $x = -\dfrac{1}{3}$, sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n (1/3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$$

hajaantuu, sillä $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} \neq 0$.

Vastaus: potenssisarja, keskus $x_0 = -\dfrac{2}{3}$ ja kertoimet $a_n = \dfrac{n^2 3^n}{n+1}$, suppenee joukossa $\left]-1, -\dfrac{1}{3}\right[$ suppenemissäteellä $R = \dfrac{1}{3}$.

Tehtävä 15

Olkoot $a_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aidosti vähenevä jono, jolle $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ ja sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

suppenee?

Ratkaisu:

Koska jono (a_k) on aidosti vähenevä, pätee $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$. Lisäksi täytyy olla $a_k \geq 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$, sillä $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = |x - x_0| \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq |x - x_0|\,,$$

joten suhdetestin nojalla potenssisarja suppenee ainakin, kun $|x - x_0| < 1$. Tutkitaan suppenemista vielä välin päätepisteissä. Kun $x = x_0 - 1$, sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k$$

suppenee Leibnizin testin nojalla. Kun taas $x = x_0 + 1$, sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

hajaantuu, sillä oletuksen mukaan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

Vastaus: potenssisarja $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ suppenee kaikilla $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1[$.

Tehtävä 19

Osoita derivaattojen avulla, että

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kxk^{k-1}, \quad \text{kun } |x| < 1.$$

(Vihje: Tehtävä 18.)

Ratkaisu:

Tehtävästä 18a tiedetään ($*$), että

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \ |x| < 1.$$

Lemman 6.2.1 nojalla derivaattasarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k kx^{k-1}$$

suppenemissäde on sama eli $R = 1$. Lukusarjan lineaarisuuden nojalla

$$-\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^{k-1}.$$

Tällöin Lauseen 6.2.2 mukaan

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^{k-1}, \ |x| < 1$$

ja väite on siten osoitettu.

($*$) Geometrisen sarjan summasta saadaan, että

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

kun $|x| < 1$.

Tehtävä 20

Esitä integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

sarjana ja perustele laskusi.

Ratkaisu:

Geometriselle sarjalle pätee

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

kaikilla $|z| < 1$. Kun $z = -x^4$, $|-0|^4 = 0 < 1$ ja $\left|-\frac{1}{2}\right|^4 < 1$, eksponenttifunktion $x \mapsto \left|-x^4\right|$ kasvavuuden nojalla geometrinen sarja

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^4\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$$

suppenee välillä $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Lauseen 6.2.2 nojalla suppenevaa sarjaa voidaan integroida termeittäin siten, että

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^n x^{4n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}^{4n+1} - 0^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 16^n\,(4n+1)},$$

missä suppeneminen pysyy samana.

Vastaus: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 16^n (4n+1)}$.

Tehtävä 22

Laske sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{3^n}$$

summa.

Ratkaisu:

Tutkitaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n^2+n\right) x^n.$$

Raja-arvon laskusäännöillä

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n^2+n}{(2(n+1)^2+(n+1))} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{2n^2+5n+3} = 1,$$

joten Lauseen 6.1.11 nojalla potenssisarjan suppenemissäde on $R = 1$. Olkoon siis $x \in \left]-1,1\right[$. Tällöin lukusarjojen lineaarisuuden ja majoranttiperiaatteen nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2+n)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

sillä

$$2n^2x^n \leq (2n^2+n)x^n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad nx^n \leq (2n^2+n)x^n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sarjalle $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ saadaan Esimerkin 6.2.4 avulla suoraan lauseke

$$2\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = 2x\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Lemman 6.2.1 ja Lauseen 6.2.2 nojalla puolestaan saadaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = x\frac{d}{dx}\left(x\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Siispä

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2+n)x^n = \frac{2x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2},$$

joten valitsemalla $x = \frac{1}{3} \in \left]-1,1\right[$ saadaan. että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{3^n} = \frac{2(1/3)(1/3+1)}{(1-1/3)^3} + \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{15}{4}.$$

Vastaus: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{3^n} = \frac{15}{4}$

Tehtävä 25

Osoita, että potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kun määritellään $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

niin näytä, että funktiolla F on kaikkien kertalukujen derivaatat ja että funktio F toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} F''(x) + F(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}, \\ F(0) = 1, \\ F'(0) = 0. \end{cases}$$

Ratkaisu:

Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja $a_k = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} [(2k+2)(2k+1)] = \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

joten Lauseen 6.1.11 nojalla sarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ suppenemissäde on $R = \infty$ eli se suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Määritellään sitten apufunktio $\gamma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(k) = \begin{cases} (-1)^n, & k = 2n \text{ jollakin } n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n+1 \text{ jollakin } n \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \end{cases}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että osasummille

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{ja} \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k$$

pätee

$$A_k = B_{2k} \ \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Väite selvästi pätee, kun $k = 0$, sillä

$$A_0 = \frac{(-1)^0}{0!} x^0 = x^0 = \frac{\gamma(0)}{0!} x^0 = B_{2\cdot 0} = B_0.$$

Tehdään nyt induktio-oletus, että väite pätee, kun $k = n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Kun $k = n + 1$, saadaan

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{=A_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
&= B_{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}.
\end{aligned}$$

Koska $2n + 1$ on aina pariton, voidaan kirjoittaa

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \underbrace{\frac{\gamma(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{=0} + \frac{\overbrace{\gamma(2n+2)}^{=(-1)^{n+1}}}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

joten

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k + \frac{\gamma(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{\gamma(2n+2)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k = B_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla siis $A_k = B_{2k}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, mistä seuraa, että $\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k$. Tällöin potenssisarja saadaan kirjoitettua muotoon

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k.$$

Nyt Lauseen 6.2.2 nojalla funktiolla F on kaikkien kertalukujen (jatkuvat) derivaatat joukossa $\mathbb{R}$. Lisäksi derivaattafunktioille F', $F'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee, että

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\gamma(k)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\gamma(k)}{(k-1)!}}_{:=b_k} x^{k-1}$$

ja

$$F''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\gamma(k)}{(k-1)!} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{(k-2)!} x^{k-2}.$$

Tällöin

$$F(0) = a_0 = \frac{(-1)^0}{0!} = 1$$

ja

$$F'(0) = b_1 = \frac{\gamma(1)}{0!} = 0,$$

kuten haluttiinkin.

Lukusarjojen lineaarisuuden avulla puolestaan saadaan, että

$$\begin{aligned}
F''(x) + F(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{(k-2)!} x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(k+2)}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big(\gamma(k+2) + \gamma(k) \Big).
\end{aligned}$$

Riittää siis osoittaa, että $\gamma(k+2) + \gamma(k) = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kun $k = 0$, saadaan suoraan

$$\gamma(0+2) + \gamma(0) = \gamma(2) + \gamma(0) = (-1)^1 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Kun k on pariton eli $k = 2n+1$ jollakin $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, saadaan

$$\gamma(k+2) + \gamma(k) = 0 + 0 = 0,$$

sillä $k + 2 = 2n + 3$ on edelleen pariton. Vastaavasti, kun k on parillinen eli $k = 2m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\gamma(k+2) + \gamma(k) = \gamma(2m+2) + \gamma(2m) = (-1)^{m+1} + (-1)^m = (-1)^m(-1+1) = 0.$$

Siispä $\gamma(k+2) + \gamma(k) = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jolloin $F''(x) + F(x) = 0$ ja väite on siten osoitettu.