Tehtävä 2

Muodosta funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 1$,

(a) n. Taylorin polynomi $T_{n,x_0} f(x)$ pisteessä $x_0 = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) toinen Taylorin polynomi $T_{2,x_0} f(x)$ pisteessä $x_0 = 2$.

Ratkaisu:

(a) f on polynomina n kertaa derivoituva, joten

$$\begin{aligned}
f(x) = x^5 + 1 &\implies f(1) = 2 \\
f'(x) = 5x^4 &\implies f'(1) = 5 \\
f''(x) = 20x^3 &\implies f''(1) = 20 \\
f'''(x) = 60x^2 &\implies f'''(1) = 60 \\
f^{(4)}(x) = 120x &\implies f^{(4)}(1) = 120 \\
f^{(5)}(x) = 120 &\implies f^{(5)}(1) = 120 \\
f^{(n)}(x) = 0 \;\; \forall n \geq 6, n \in \mathbb{N} &\implies f^{(n)}(1) = 0 \;\; \forall n \geq 6, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Tällöin Taylorin polynomin määritelmän mukaisesti

$$\begin{aligned}
&T_{0,1} f(x) = 2 \\
&T_{1,1} f(x) = 2 + 5(x-1) = 5x - 3 \\
&T_{2,1} f(x) = 5x - 3 + \frac{20}{2!}(x-1)^2 = 10x^2 - 15x + 7 \\
&T_{3,1} f(x) = 10x^2 - 15x + 7 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 = 10x^3 - 20x^2 + 15x - 3 \\
&T_{4,1} f(x) = 10x^3 - 20x^2 + 15x - 3 + \frac{120}{4!}(x-1)^4 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 2 \\
&T_{5,1} f(x) = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 2 + \frac{120}{5!}(x-1)^5 = x^5 + 1 = f(x).
\end{aligned}$$

Lisäksi koska $f^{(n)}(1) = 0 \;\; \forall n \geq 6, n \in \mathbb{N}$, nähdään induktiivisesti, että

$$T_{n,1} f(x) = x^5 + 1 = f(x)$$

kaikilla $n \geq 6$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) f on jälleen polynomina kahdesti derivoituva, joten

$$\begin{aligned} f(x) = x^5 + 1 &\implies f(2) = 33 \\ f'(x) = 5x^4 &\implies f'(2) = 80 \\ f''(x) = 20x^3 &\implies f''(2) = 160. \end{aligned}$$

Tällöin Taylorin polynomin määritelmän mukaisesti

$$\begin{aligned} T_{2,2}f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 \\ &= 33 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 \\ &= 80x^2 - 240x + 193. \end{aligned}$$

Vastaus: $T_{2,2}f(x) = 80x^2 - 240x + 193.$

Tehtävä 4

Muodosta funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log(1 + e^x),$$

kolmas Taylorin polynomi $T_{3,x_0} f(x)$ pisteessä $x_0 = 0$.

Ratkaisu:

f on derivoituvien funktioiden yhdisteenä kolmesti derivoituva, joten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1 + e^x) &&\implies f(0) = \log 2 \\
f'(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} &&\implies f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} &&\implies f''(0) = \frac{1}{4} \\
f'''(x) &= \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} &&\implies f'''(0) = 0.
\end{aligned}$$

Tällöin Taylorin polynomin määritelmän mukaisesti

$$\begin{aligned}
T_{3,0} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + 0x^3 \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2.
\end{aligned}$$

Vastaus: $T_{3,0} f(x) = \log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2.$

Tehtävä 6

Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kahdesti derivoituva siten, että

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) &= e^{-x} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R} \\ f(0) &= 0 \quad \text{ja} \\ f'(0) &= 2. \end{cases}$$

Laske funktion f neljäs Taylorin polynomi nollassa, $T_{4,0}f$.

Ratkaisu:

Oletuksesta nähdään suoraan, että $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 2$. Toiselle derivaatalle saadaan arvo

$$f''(x) = e^{-x} - f(x) \implies f''(0) = 1 - f(0) = 1.$$

Derivoimalla yhtälöä $f''(x) + f(x) = e^{-x}$ puolittain saadaan, että

$$f'''(x) = -e^{-x} - f'(x) \implies f'''(0) = -1 - f'(0) = -3.$$

Vastaavasti saadaan, että

$$f^{(4)}(x) = e^{-x} - f''(x) \implies f^{(4)}(0) = 1 - f''(0) = 0.$$

Siispä Taylorin polynomiksi tulee

$$\begin{aligned} T_{4,0}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

Vastaus: $T_{4,0}f(x) = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$.

Tehtävä 15

Määritä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x)\cos(x),$$

Taylorin polynomi $T_{6,0}f$.

Ratkaisu:

Trigonometrian perusteella $f(x) = \sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$, joten

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) &\implies f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos(2x) &\implies f'(0) = 1 \\
f''(x) = -2\sin(2x) &\implies f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -4\cos(2x) &\implies f'''(0) = -4 \\
f^{(4)}(x) = 8\sin(2x) &\implies f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = 16\cos(2x) &\implies f^{(5)}(0) = 16 \\
f^{(6)}(x) = -32\sin(2x) &\implies f^{(6)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Taylorin polynomin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
T_{6,0}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5.
\end{aligned}$$

Vastaus: $T_{6,0}f(x) = x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5.$

Tehtävä 18

Laske, Taylorin polynomeja käyttäen, raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ratkaisu:

Olkoon $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Esimerkin 7.1.10 nojalla

$$\log(1 - z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j} + E_n(z)z^n,\ E_n(z) \xrightarrow{z\to 0} 0,$$

joten

$$\begin{aligned} f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1/x)^j}{j} + E_n(-1/x)(-1/x)^n \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{E_3(-1/x)}{x^3},\ E_3(-1/x) \xrightarrow{-1/x\to 0} 0. \end{aligned}$$

Koska $E_3(-1/x) \xrightarrow{-1/x\to 0} 0$, pätee $E_3(-1/x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Siispä

$$xf(x) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{E_3(-1/x)}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$

eli

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Tällöin myös

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

sillä $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Vastaus: $\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$

Tehtävä 20

Laske Taylorin polynomien avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 e^x}.$$

Ratkaisu:

Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin x}$ ja $x_0 = \frac{\pi}{2}$. f on kahdesti derivoituvia, joten

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\sin x} &\implies f(\pi/2) = e \\ f'(x) = e^{\sin x}\cos x &\implies f'(\pi/2) = 0 \\ f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) &\implies f''(\pi/2) = -e. \end{aligned}$$

Taylorin polynomiksi tulee siten

$$\begin{aligned} T_{2,\frac{\pi}{2}} f(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= e - \frac{1}{2}e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Taylorin lauseen perusteella

$$f(x) = T_{2,\frac{\pi}{2}} f(x) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 E_2(x),$$

missä $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} E_2(x) = 0$. Sijoittamalla tämä alkuperäisen raja-arvon lausekkeeseen saadaan eksponenttifunktion jatkuvuuden perusteella

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin x} - e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 e^x} &= \frac{e - \frac{1}{2}e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 E_2(x) - e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 e^x} \\ &= \frac{E_2(x) - \frac{1}{2}e}{e^x} \xrightarrow{x\to\pi/2} -\frac{1}{2}e^{1-\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Vastaus: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 e^x} = -\frac{1}{2}e^{1-\frac{\pi}{2}}.$

Tehtävä 21

Arvioi lukua $\cos 2$ niin, että virhe on pienempi kuin $< 10^{-4}$ käyttäen Taylorin polynomia ja arvioimalla (jotain muotoa) jäännöstermiä.

Ratkaisu:

Olkoon $x > 0$. Esimerkin 7.1.5 perusteella

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{n,0} \cos(x),$$

missä Lauseen 7.2.1 nojalla $R_{n,0}\cos(x) = \dfrac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ jollakin $\xi \in [0, x]$. Tällöin

$$\cos 2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} + \frac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 2^{n+1}.$$

Induktiivisesti nähdään, että

$$\cos^{(n+1)}(z) = \begin{cases} -\sin(z) \\ -\cos(z) \\ \sin(z) \\ \cos(z) \end{cases},$$

riippuen n:n arvosta. Tarkkaa riippuvuutta ei kuitenkaan tarvita, vaan riittää tieto, että

$$\cos^{(n+1)}(\xi) \leq 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Jäännöstermiä voidaan nyt arvioida siten, että

$$\frac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 2^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4},$$

josta kokeilemalla selviää, että valinta $n = 10$ kelpaa. Luvulle $\cos 2$ saadaan siten arvio

$$\cos 2 \approx \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} \approx -0.416147,$$

missä $|-0.416147 - \cos 2| < 10^{-4}$.

Vastaus: $\cos 2 \approx -0.416147$.

Tehtävä 27

Arvioi integraalia

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

vähintään 10^{-3} tarkkuudella käyttäen Taylorin polynomeja.

Ratkaisu:

Olkoon $x \in [0,1]$. Esimerkin 7.1.5 perusteella

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{n,0}(x),$$

missä Lauseen 7.2.1 nojalla jäännöstermille pätee

$$R_{n,0}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

jollakin $\xi \in [0,x]$. Induktiivisesti nähdään, että

$$\sin^{(n+1)}(z) = \begin{cases} \sin(z) \\ \cos(z) \\ -\sin(z) \\ -\cos(z) \end{cases},$$

riippuen n:n arvosta. Tässä tilanteessa riittää kuitenkin tieto siitä, että

$$\sin^{(n+1)}(\xi) \leq 1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin jäännöstermille saadaan arvio

$$R_{n,0}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nyt siis

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \tilde{R}_{n,0}(x),$$

missä

$$\tilde{R}_{n,0}(x) = \frac{R_{n,0}(x)}{x} \leq \frac{x^n}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Kokeilemalla nähdään, että epäyhtälön $\tilde{R}_{n,0}(x) < 10^{-3}$ toteuttaa esimerkiksi $n = 6$. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx &\approx \int_0^1 \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} \approx 0.946083,\end{aligned}$$

missä $\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - 0.946083\right| < 10^{-3}$.

Vastaus: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0.946083$.

Sovellus: pienen kulman approksimaatio

Fysiikassa (joka on pääaineeni) paljon käytetty pienen kulman approksimaatio saadaan helpoiten trigonometristen funktioiden Taylorien polynomeista. Esimerkin 7.1.5 perusteella

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} E_{2n+1}(x) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} E_{2n+1}(x),
\end{aligned}
$$

missä $E_{2n+1} \xrightarrow{x \to 0} 0$. Tällöin sinifunktiota voidaan approksimoida ensimmäisen kertaluvun Taylorin polynomilla

$$\sin x \approx T_{1,0} \sin(x) = x.$$

Vastaavasti saadaan

$$\cos x \approx 1 \quad \text{ja} \quad \tan x \approx x.$$

Näitä pienen kulman approksimaatioita käytetään paljon fysiikassa. Esimerkiksi heilurin liikeyhtälön ratkaisemisessa sinitermi korvataan pienen kulman approksimaatiolla ja erilaisten rakojärjestelmien interferenssikuvioiden jakaumassa kulmien sinit korvataan pelkällä kulmalla laskujen yksinkertaistamiseksi.