Tehtävä 1

Laske $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ de Moivre'n kaavan avulla.

Ratkaisu:

Kompleksikonjugaatilla laventamalla

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = -i.$$

Huomataan, että

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2},$$

jolloin de Moivre'n kaavalla

$$(-i)^8 = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^8 = \cos\left(8\cdot\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(12\pi) + i\sin(12\pi) = 1.$$

Siispä

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = 1.$$

Tehtävä 2

Ratkaise yhtälö $z^5 = -1$. Piirrä kuva, josta käy ilmi juurten sijainti kompleksitasossa. Missä pääjuuri sijaitsee?

Ratkaisu:

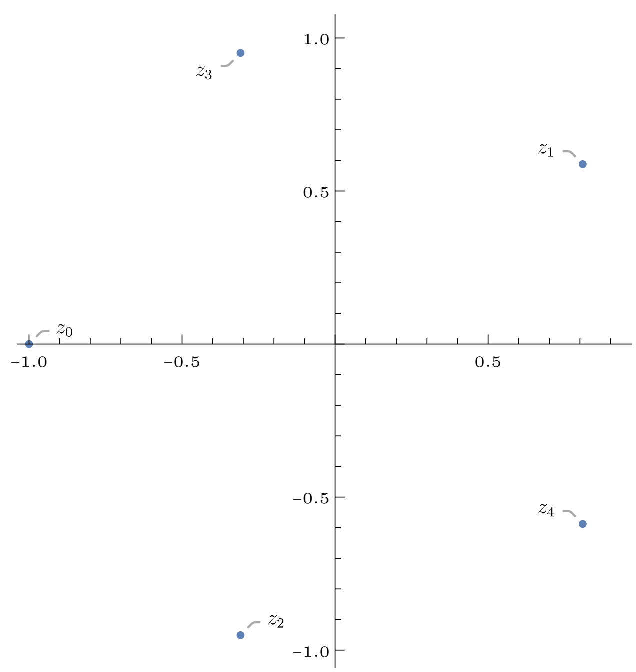
Koska $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, niin Lauseen 2.53 mukaan

$$z_k = 1^{1/5}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right),$$

missä $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}},\\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}},\\
z_2 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1,\\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}},\\
z_4 &= \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) - \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Näistä $z_2 = -1 \in \mathbb{R}$, joten se on pääjuuri. Juuret on esitetty alla olevassa kuvassa.



Tehtävä 3

Etsi kompleksisessa muodossa sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $-4i$ ja 1 kautta.

Ratkaisu:

Suora on muotoa $L = \{z \in \mathbb{C} : \overline{a}z + a\overline{z} + c = 0\}$, joten erityisesti $-4i \in L$ ja $1 \in L$. Näin ollen

$$\begin{cases} -4i\overline{a} + 4ia + c = 0 \\ \overline{a} + a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4i(a - \overline{a}) + c = 0 \\ \overline{a} + a + c = 0 \end{cases}.$$

Koska

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{\overline{a} + a}{2} \quad \text{ja} \quad \mathrm{Im}(a) = \frac{a - \overline{a}}{2i},$$

niin

$$\begin{cases} 4i(a - \overline{a}) + c = 0 \\ \overline{a} + a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8\,\mathrm{Im}(a) + c = 0 \\ 2\,\mathrm{Re}(a) + c = 0 \end{cases}.$$

Täyty siis olla, että $2\,\mathrm{Re}(a) = -8\,\mathrm{Im}(a)$, joten valitaan $a = 4 - i$. Tällöin $8 + c = 0 \iff c = -8$, eli suoraksi tulee

$$L = \{z \in \mathbb{C} : (4 + i)z + (4 - i)\overline{z} - 8 = 0\}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan valita $A = \mathrm{Re}(a)$, $B = \mathrm{Im}(a)$ ja $C = c/2$, jolloin

$$4x - y - 4 = 0,$$

missä $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Tehtävä 4

Piirrä ja kuvaile geometrisesti seuraavien ehtojen määrittelemät kompleksitason osajoukot. Mitkä niistä ovat rajoitettuja ja mitkä eivät?

(a) $1 \leq |z| < 2$

(b) $|2z - i| = 1$

(c) $|\mathrm{Arg}(z)| < \pi/4$

(d) $|z - 4| > |z|$.

Ratkaisu:

(a) Kyseessä on rengas, eli siis 2-säteinen origokeskeinen ympyrä, josta on poistettu keskeltä 1-säteinen origokeskeinen ympyrä. Kyseessä on selvästi rajoitettu joukko, sillä se sisältyy esimerkiksi palloon $\overline{B}(0, 2)$.

(b) Kun $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
|2z - i| = 1 &\iff |2z - i|^2 = |2x + 2iy - i|^2 = 4x^2 + (2y - 1)^2 = 1 \\
&\iff 4x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

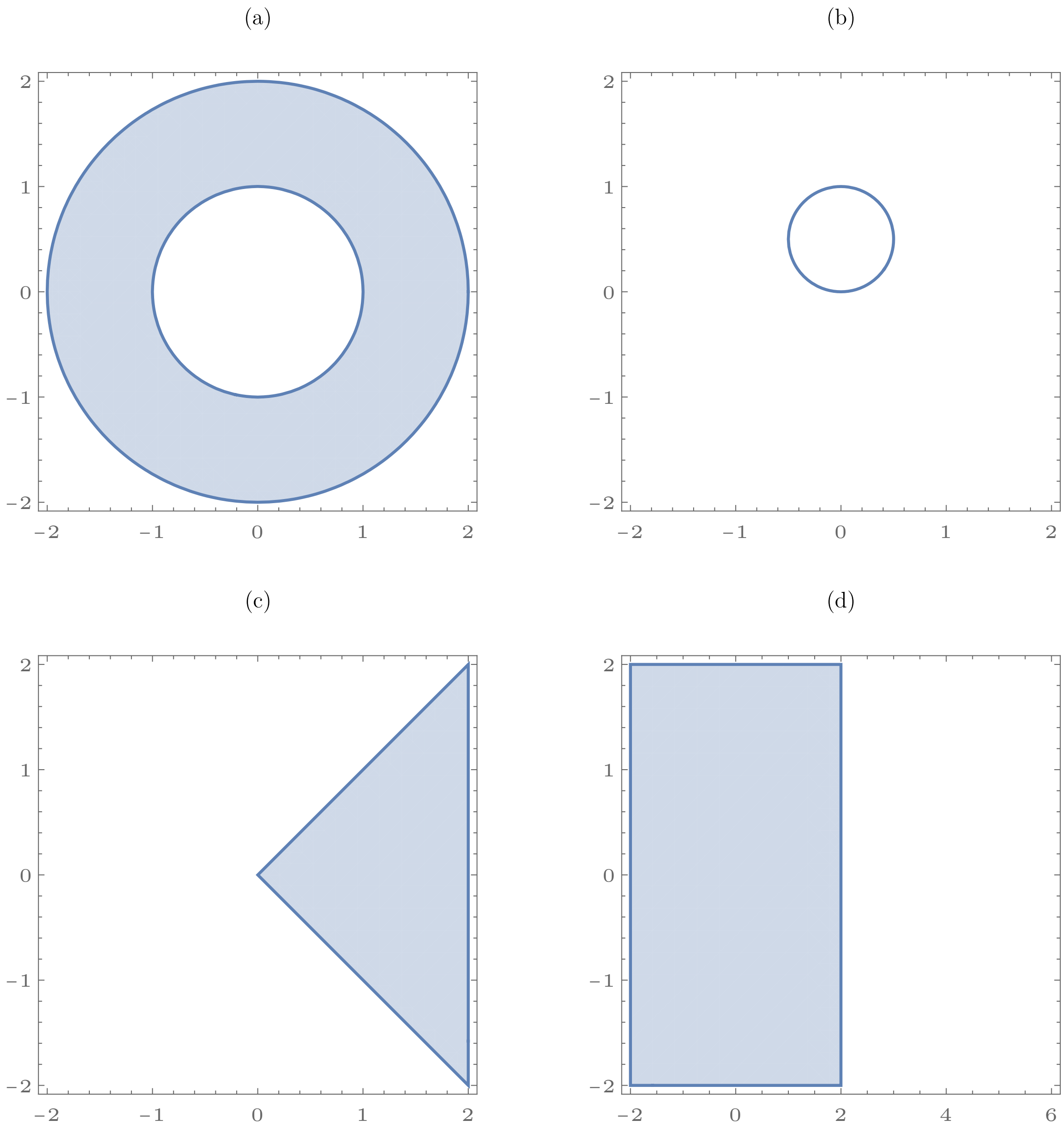
Kyseessä on siis $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-keskeinen 1/2-säteinen ympyrä, joka on rajoitettu (Lause 2.63).

(c) $\mathrm{Arg}(z)$ kuvaa sitä kulmaa, joka jää luvun z ja x-akselin väliin kompleksitasossa. Näin ollen $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi/4$ tarkoittaa kaikkia niitä kompleksilukuja z, joiden tekemä kulma x-akselin kanssa on 0:n ja $\pi/4$:n välissä. Kun sitten vaaditaan, että $|\mathrm{Arg}(z)| < \pi/4$, niin tämä sisältää myös negatiiviset kulmat, eli peilaa joukon $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi/4$ x-akselin suhteen. Tämä joukko ei ole rajoitettu: olkoon $M > 0$. Tällöin valitsemalla $z = 2M$ saadaan, että $|\mathrm{Arg}(z)| = 0 < \pi/4$ ja $|z| = 2M > M$.

(d) Merkitään jälleen $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|z - 4| > |z| &\iff |z - 4|^2 > |z|^2 \\
&\iff |(x - 4) + yi|^2 > |x + yi|^2 \\
&\iff (x - 4)^2 + y^2 > x^2 + y^2 \\
&\iff 8x < 16 \\
&\iff x < 2.
\end{aligned}$$

Siispä $|z - 4| > |z|$ on puolitaso ja se sisältää kaikki sellaiset pisteet z, joille $\mathrm{Re}(z) < 2$. Tästä nähdään suoraan, että kyseinen joukko on rajoittamaton.



Kuva 1: Tehtävän 4 joukot kompleksitasossa.

Tehtävä 5

Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| = 1$. Tarkastellaan kiertokuvausta $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $R(z) = az$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(a) Osoita, että $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on bijektio. Eli näytä että R on injektio ja surjektio.

(b) Etsi kiertokuvauksen R käänteisfunktio $R^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(c) Onko käänteiskuvaus myös kiertokuvaus?

Ratkaisu:

(a) Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$. Tällöin $R(z) = az = aw = R(w) \iff z = w$ eli R on injektio. Toisaalta, jokaiselle $w' \in \mathbb{C}$ on olemassa $z' = w'/a \in /C$ siten, että $R(z') = a \cdot w'/a = w'$ eli R on myös surjektio. Näin ollen R on bijektio.

(b) Merkitään $R(z) = az = w$, jolloin $z = w/a$. Näin ollen käänteiskuvaus $\mathbb{R}^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ saa lausekkeen

$$R^{-1}(z) = \frac{z}{a},$$

jolloin jokaisella $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$R(R^{-1}(z)) = R\left(\frac{z}{a}\right) = z = R^{-1}(az) = R^{-1}(R(z)).$$

(c) On, sillä Lauseen 2.25 mukaan

$$\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{1} = 1,$$

joten asettamalla $a' = 1/a$ saadaan, että $R^{-1}(z) = a'z$, missä $|a'| = 1$.

Tehtävä 6

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 4iz + i$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(a) Kirjoita f muodossa $T \circ M \circ R$, missä T on siirto-, M on venytys- ja R on kiertokuvaus.

(b) Etsi kuvajoukko $f(S(0,1))$. Voit tehdä tämän vaiheittain kohdan (a)-avulla.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $T, M, R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Asetetaan $T(z) = z + i$, jolloin T on siirtokuvaus ja $f(z) = T(4iz)$. Jos taas asetetaan $M(z) = 4z$, niin tällöin M on venytyskuvaus, sillä $4 > 0$ ja lisäksi $4iz = M(iz)$, joten

$$f(z) = T(M(iz)).$$

Kun vielä asetetaan $R(z) = iz$, niin R on kiertokuvaus, sillä $|i| = 1$ ja

$$f(z) = T(M(R(z))).$$

(b) Päätellään $f(S(0,1))$ geometrisesti[1]. $S(0,1)$ on origokeskeinen yksikköympyrä kompleksitasossa, joten sen pyöräyttämisen jälkeen tuloksena on edelleen ympyrä. Siispä $R(S(0,1)) = S(0,1)$. Venytyskuvaus skaalaa kaiken tekijällä 4, joten yksikkösäteisen ympyrä skaalautuu 4-säteiseksi. Siispä $M(S(0,1)) = S(0,4)$. Siirtokuvaus puolestaan siirtää ympyrän keskipistettä, joten $T(S(0,4)) = S(i,4)$. Kaiken kaikkiaan

$$f(S(0,1)) = S(i,4).$$

[1] Voisihan nämä väitetyt yhtäsuuruudet todistaakin, mutta menee aika pitkäksi...

Tehtävä 7

Olkoon $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Totea Määritelmän 3.19 avulla, että *Eulerin kaava* pätee:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

(b) Tarkista Eulerin kaavan avulla, että $(\sin\theta)^3 = (2i)^{-3}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3$.

(c) Näytä kohdan (b) ja eksponenttifunktion laskusääntöjen avulla, että

$$(\sin\theta)^3 = \frac{1}{4}(3\sin(\theta) - \sin(3\theta)).$$

Ratkaisu:

(a) Eksponenttifunktion määritelmästä

$$e^{i\theta} = e^{0+i\theta} = e^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

(b) Eulerin kaavalla sekä sinin parittomuudella ja kosinin parillisuudella saadaan, että

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta \\ &= 2i\sin\theta. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\sin^3\theta = (2i)^{-3}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3.$$

(c) Käyttämällä eksponenttifunktion ominaisuutta $e^z e^w = e^{z+w}$ (Lause 3.22) saadaan

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 &= \left(e^{2i\theta} - 2e^0 + e^{-2i\theta}\right)\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ &= e^{3i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{-3i\theta} - 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}. \end{aligned}$$

Käyttämällä uudestaan Eulerin kaavaa saadaan, että

$$
\begin{aligned}
\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 &= e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta} \\
&= \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) - 3\cos\theta - 3i\sin\theta + 3\cos\theta - 3i\sin\theta - \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) \\
&= 2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta).
\end{aligned}
$$

(b)-kohdan nojalla

$$
\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \frac{1}{8i^3}\left(2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)\right) \\
&= \frac{1}{4}i^2(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)) \\
&= \frac{1}{4}(3\sin(\theta) - \sin(3\theta)).
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8

Olkoon $z = 2 + i3\pi$ ja $w = -1 + i2\pi$. Laske:

(a) e^z/e^w

(b) $\mathrm{Arg}(e^z e^w)$

(c) $|e^{z+w}|$

(d) $\overline{e^w} - e^{\overline{w}}$.

Ratkaisu:

(a) Lauseen 3.22 ja eksponenttifunktion määritelmän avulla

$$\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w} = e^{3-i\pi} = e^3(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -e^3.$$

(b) Seurauksen 2.44 ja Lauseen 3.23 mukaan

$$\mathrm{Arg}(e^z e^w) = \mathrm{Arg}(e^z) + \mathrm{Arg}(e^w) + m2\pi = 3\pi + 2\pi + k2\pi = 5\pi - 4\pi = \pi \in (-\pi, \pi]\,.$$

(c) Lauseen 3.22, modulin ominaisuuksien sekä Lauseen 3.23 perusteella

$$\left|e^{z+w}\right| = |e^z e^w| = |e^z|\,|e^w| = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{\mathrm{Re}(w)} = e^2e^{-1} = e.$$

(d) Lauseen 3.23 nojalla $\overline{e^w} = e^{\overline{w}}$, joten

$$\overline{e^w} - e^{\overline{w}} = 0.$$