Tehtävä 1

Etsi kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille pätee $\cos(z) = 0$.

Ratkaisu:

Määritelmän nojalla

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

joten $\cos(z) = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0$. Nyt eksponenttifunktion laskusäännöillä

$$e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff e^{2iz} + 1 = 0.$$

Lauseesa 3.28 saadaan, että

$$2iz = \log|-1| + i(\operatorname{Arg}(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Näin ollen

$$z = \frac{1}{2}(2k+1)\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tehtävä 2

Laske seuraavissa $\operatorname{Log}(z)$.

(a) $z = \sqrt{3} - i$

(b) $z = e^{2020}$

(c) $z = e^{2020+4\pi i}$

Ratkaisu:

(a) Koska $\sqrt{3} - i$ on 4. kvadrantissa, pätee $\operatorname{Arg}\left(\sqrt{3} - i\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\pi/6$, joten

$$\operatorname{Log}\left(\sqrt{3} - i\right) = \log\left|\sqrt{3} - i\right| + i \operatorname{Arg}\left(\sqrt{3} - i\right) = \log 2 - \frac{i\pi}{6}.$$

(b) Selvästi $e^{2020} \in \mathbb{R}$, joten $e^{2020} \in V_0$. Tällöin Lauseen 3.31 mukaan

$$\operatorname{Log}\left(e^{2020}\right) = 2020.$$

(c) Eulerin kaavasta

$$e^{4\pi i} = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = 1.$$

Nyt eksponenttifunktion, modulin ja argumentin laskusäännöillä

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\left(e^{2020+4\pi i}\right) &= \log\left|e^{2020+4\pi i}\right| + i \operatorname{Arg}\left(e^{2020+4\pi i}\right) \\
&= \log\left(\left|e^{2020}\right| \left|e^{4\pi i}\right|\right) + i\left(\operatorname{Arg}\left(e^{2020}\right) + \operatorname{Arg}\left(e^{4\pi i}\right)\right) \\
&= \log\left(e^{2020}\right) + \log 1 + i(0 + 0) \\
&= 2020.
\end{aligned}$$

Tehtävä 3

Etsi kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille pätee $e^{z/2} = -1 + i$.

Ratkaisu:

Merkitään $\zeta = z/2$. $-1 + i$ on 2. kvadrantissa, joten

$$\mathrm{Arg}(-1+i) = \arctan\left(-\frac{1}{1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi]\,.$$

Lauseen 3.28 mukaan

$$\begin{aligned} e^{\zeta} = -1 + i \iff \zeta &= \log|-1+i| + i(\mathrm{Arg}(-1+i) + 2\pi k) \\ &= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \\ &= \log\sqrt{2} + i\pi\left(2k + \frac{3}{4}\right), \end{aligned}$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Siispä

$$z = 2\zeta = 2\log\sqrt{2} + 2i\pi\left(2k + \frac{3}{4}\right) = \log 2 + 2i\pi\left(2k + \frac{3}{4}\right).$$

Tehtävä 4

(a) Laske potenssit i^i ja $(-1)^i$.

(b) Tarkista, että

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}, \qquad z^{\alpha_1}/z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1-\alpha_2},$$

kun $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ratkaisu:

(a) Koska $\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$, niin

$$\operatorname{Log}(i) = \log|i| + i\operatorname{Arg}(i) = \log 1 + \frac{i\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}.$$

Tällöin

$$i^i = e^{i\operatorname{Log}(i)} = e^{i\cdot\frac{i\pi}{2}} = e^{-\pi/2} \ (\in \mathbb{R}\ !!).$$

Toisaalta $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, joten

$$\operatorname{Log}(-1) = \log|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = i\pi.$$

Siispä

$$(-1)^i = e^{i\operatorname{Log}(-1)} = e^{-\pi}.$$

(b) Olkoon $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Eksponenttifunktion ominaisuuksilla

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = e^{\alpha_1\operatorname{Log}(z)} e^{\alpha_2\operatorname{Log}(z)} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{Log}(z)} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$$

ja

$$\frac{z^{\alpha_1}}{z^{\alpha_2}} = \frac{e^{\alpha_1\operatorname{Log}(z)}}{e^{\alpha_2\operatorname{Log}(z)}} = e^{(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{Log}(z)} = z^{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Tehtävä 5

Tarkastellaan polynomia $P(z) = z^5 - iz^4 - z + i$. Etsi kompleksiluvut $z_1, \ldots, z_5$ siten, että

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5), \qquad \text{kun } z \in C.$$

Ratkaisu:

Kokeilemalla nähdään, että $P(i) = i - i - i + i = 0$. Tällöin jakokulmasta saadaan, että $P(z) = (z - i)(z^4 - 1)$:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & z^4 & & & -1 \\
\cline{3-6}
z & -i & \multicolumn{1}{|c}{z^5} & -iz^4 & -z & +i \\
 & - & (z^5 & -iz^4) & & \\
\hline
 & & & & -z & \\
 & & & - & (-z & +i) \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}$$

Lauseen 2.53 nojalla yhtälön $z^4 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\
z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = i, \\
z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -1, \\
z_3 &= \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) = -i.
\end{aligned}$$

Siispä

$$P(z) = (z - i)(z - 1)(z - i)(z + 1)(z + i).$$

Tehtävä 6

Selvitä funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{3z-i}{z+1}, \qquad z \in A,$$

luonnollinen määrittelyjoukko $A \subset \mathbb{C}$ ja laske derivaatta $f'(z)$ kun $z \in A$.

Ratkaisu:

Ainoa ongelma tulee, jos $z + 1 = 0 \iff z = -1$, joten luonnollinen määrittelyjoukko on $A = \mathbb{C} \setminus \{-1\} \subset \mathbb{C}$. Lauseiden 4.4 ja 4.6 avulla puolestaan

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{(z+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(3z-i) - (3z-i)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+1)}{(z+1)^2} \\
&= \frac{(z+1)\left(3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z)\right) - (3z-i)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z)}{(z+1)^2} \\
&= \frac{3(z+1) - 3z + i}{(z+1)^2} = \frac{3+i}{(z+1)^2}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 7

Laske raja-arvo

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + iz}.$$

Ratkaisu:

Olkoon $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z - 1$ ja $g(z) = z^2 + iz$. f ja g ovat selvästi derivoituvia kaikkilla $z \in \mathbb{C}$ siten, että $f'(z) = e^z$ ja $g'(z) = 2z + i$ (Lause 4.4 ja 4.6). Lisäksi $f(0) = 0 = g(0)$ ja $g'(0) = i \neq 0$, joten l'Hôpitalin säännöllä

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + iz} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{e^0}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

Tehtävä 8

Olkoon $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=1/z$ kaikilla $z\neq 0$.

(a) Etsi funktion f reaali- ja imaginaariosat $u\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ja $v\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$.

(b) Osoita, että Cauchy–Riemannin yhtälöt toteutuvat kaikissa pisteissä $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $z=x+yi\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, missä $x,y\in\mathbb{R}$. Tällöin

$$f(z)=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}}-i\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}}.$$

Tästä nähdään, että $u(x,y)=x/(x^2+y^2)$ ja $v(x,y)=-y/(x^2+y^2)$.

(b) u ja v ovat reaaliarvoisia kuvauksia, joten niihin voidaan soveltaa tavallisia derivointisääntöjä:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)&=\frac{(x^2+y^2)\partial_x x-x\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)&=\frac{(x^2+y^2)\partial_y(-y)+y\partial_y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)&=\frac{(x^2+y^2)\partial_y x-x\partial_y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)&=\frac{(x^2+y^2)\partial_x(-y)+y\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Siispä

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\text{ja}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

eli Cauchy–Riemannin yhtälöt pätevät, kuten odotettua.

*Tehtävä 9

Selvitä kaikkien niiden nollasta eroavien kompleksilukujen joukko, joille pätee $\sqrt{z^2} = z$.

Ratkaisu:

Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lauseen 3.36 todistuksesta saadaan, että

$$(z^2)^{1/2} = \left|z^2\right|^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} i \operatorname{Arg}(z^2)\right).$$

Kun merkitään $z = z + yi$, saadaan

$$\begin{aligned}\left|z^2\right|^{1/2} &= \left|x^2 - y^2 + 2xyi\right|^{1/2} = \left(\sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}\right)^{1/2} \\ &\left(\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\right)^{1/2} = \left(\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)^{1/2} = \left(x^2+y^2\right)^{1/2} \\ &= |z|.\end{aligned}$$

Siispä

$$(z^2)^{1/2} = |z| \exp\left(\frac{1}{2} i \operatorname{Arg}(z^2)\right).$$

Toisaalta

$$z = |z| \exp\left(i \operatorname{Arg}(z)\right),$$

joten $\sqrt{z^2} = z$ jos ja vain jos

$$\exp\left(\frac{1}{2} i \operatorname{Arg}(z^2)\right) = \exp\left(i \operatorname{Arg}(z)\right).$$

Tästä seuraa eksponenttifunktion laskusäännöillä, että

$$\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z)\right)\right) = 1.$$

Tällöin Lauseen 3.28 nojalla edellinen on yhtäpitävää yhtälön

$$i\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z)\right) = \log|1| + i\left(\operatorname{Arg}(1) + 2\pi k\right) = i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

kanssa. Supistamalla i pois saadaan

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Jos $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, niin tällöin $|\operatorname{Arg}(z)| \leq \pi/2$. Seurauksen 2.44 mukaan $\left|\operatorname{Arg}(z^2)\right| = |2\operatorname{Arg}(z) + 2\pi m|$. Nyt $\left|\operatorname{Arg}(z^2)\right| \leq \pi$ jos ja vain jos $m = 0$. Tästä seuraa, että $\operatorname{Arg}(z^2) = 2\operatorname{Arg}(z)$, jolloin

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z) = 0 = 2\pi \cdot 0.$$

Siispä ehto (1) toteutuu ainakin silloin, kun $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Tarkastellaan sitten mitä tapahtuu, jos $\operatorname{Re}(z) < 0$. Jos $z \in \mathbb{R}$ eli $z < 0$, niin tällöin $\operatorname{Arg}(z) = \pi$ ja $\operatorname{Arg}(z^2) = 0$, joten

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) = 0 - \pi = -\pi \neq 2\pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Oletetaan sitten, että z on 2. kvadrantissa eli että $\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi$. Tällöin $2\operatorname{Arg}(z) > \pi$, joten täytyy olla $-\pi < \operatorname{Arg}(z^2) < 0$. Tällöin

$$-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(z) < \frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) < -\operatorname{Arg}(z).$$

Koska $-\pi/2 - \operatorname{Arg}(z) \geq -3\pi/2$ ja $-\operatorname{Arg}(z) \leq -\pi/2$, niin

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{2}.$$

Erityisesti

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) \neq 2\pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Oletetaan lopuksi, että z on 3. kvadrantissa eli että $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < -\pi/2$. Tällöin $-2\pi < 2\operatorname{Arg}(z) < -\pi$, joten täytyy olla $0 < \operatorname{Arg}(z^2) < \pi$. Tästä seuraa, että

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{2},$$

erityisesti

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z^2) - \operatorname{Arg}(z) \neq 2\pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ollaan siis saatu, että ehto (1) toteutuu jos ja vain jos $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Siispä $\sqrt{z^2} = z$ jos ja vain jos $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.