Tehtävä 1

Laske Cauchyn integraalikaavan avulla integraali

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z,$$

kun $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ kaikilla $0 \le t \le 2\pi$.

Ratkaisu:

Olkoon $w = 2$, $f\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z + z$, jolloin Cauchyn integraalikaavalla

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi i n(\gamma, w) f(w).$$

Määritelmän mukaan

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-2}.$$

Kuvaus $z \mapsto 1/(z-2)$ on analyyttinen pallossa $B(0, 3/2) \supset |\gamma|$, jolloin Cauchy–Goursat'n lauseella

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-2} = 0,$$

sillä γ on suljettu ($\gamma(0) = 1 = \gamma(2\pi)$). Siispä

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i n(\gamma, w) f(w) = 0.$$

Tehtävä 2

Laske Cauchyn integraalikaavan avulla integraali

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z,$$

kun $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3e^{it}$ kaikilla $0 \le t \le 2\pi$.

Ratkaisu:

Toisin kuin edellisessä tehtävässä, Cauchy–Goursat'n lausetta ei voi soveltaa. Tyydytään siis geometriseen tulkintaan. γ:n jälki on 3-säteinen ympyrä, joka kierretään kerran vastapäivään. Koska $2 \in |\gamma|$, niin täytyy olla $n(\gamma, 2) = 1$. Tällöin Cauchyn integraalilauseesta saadaan Tehtävän 1 merkinnöillä

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i n(\gamma, 2) f(2) = 2\pi i \cdot 1 \cdot \left(e^2 + 2\right) = 2\pi i \left(e^2 + 2\right).$$

Tehtävä 3

Selvitä minkälainen erikoispiste origo on funktiolle

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}.$$

Laske myös funktion residy origossa.

Ratkaisu:

Olkoon $f\colon B(0, \pi/2) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z/\sin z$. Määrittelyjoukossa f on analyyttinen, jolloin l'Hôpitalin säännöllä

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{[z]'_{z=0}}{[\sin z]'_{z=0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Näin ollen Lauseen 6.11 perusteella origo on poistuva erikoispiste. Lisäksi määritelmästä

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 0.$$

Tehtävä 4

Selvitä minkälainen erikoispiste origo on funktiolle

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-1)}.$$

Laske myös funktion residy origossa.

Ratkaisu:

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-1)}$. Tällöin

$$\lim_{z\to 0} \left|z^2\right| |f(z)| = \lim_{z\to 0} \left|z^2\right| \frac{|\cos z|}{|z^2|\,|z-1|} = \lim_{z\to 0} \frac{|\cos z|}{|z-1|} = 1 \in \left]0, \infty\right[.$$

Lauseen 6.16 nojalla origo on 2. kertaluvun napa. Merkitään $h\colon \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = z^2 f(z) = \dfrac{\cos z}{z-1}$, jolloin alkeisfunktioiden derivointisäännöillä ja osamäärän derivaatalla

$$h'(z) = \frac{-\sin z(z-1) - \cos z}{(z-1)^2}.$$

Tällön Lauseesta 6.20 saadaan, että

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} h'(z) = -1.$$

Tehtävä 5

Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$ kaikilla $t \in [0,2\pi]$. Laske residylauseen avulla integraali

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z.$$

Ratkaisu:

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$. Edellisen tehtävän nojalla $\mathrm{Res}(f,0) = -1$. Lisäksi

$$\lim_{z\to 1} |z-1|\,|f(z)| = \lim_{z\to 1} \frac{|\cos z|}{|z^2|} = \cos 1 \in \,]0,\infty[\,,$$

jolloin Lauseesta 6.16 saadaan, että piste 1 on 1. kertaluvun napa. Nyt Lauseen 6.20 perusteella

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\cos z}{z^2} = \cos 1.$$

Nyt f on analyyttinen esimerkiksi joukossa $B(0,3) \setminus \{0,1\}$, jolloin residylauseesta saadaan

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(n(\gamma,0)\,\mathrm{Res}(f,0) + n(\gamma,1)\,\mathrm{Res}(f,1)).$$

Esimerkin 6.4 perusteella $n(\gamma,0) = 1$. Geometrisesti on selvää, että myös $n(\gamma,1)$, sillä $|\gamma|$ on 2-säteinen ympyrä kerran kierrettynä vastapäivään. Näin ollen

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)) = 2\pi i(\cos 1 - 1).$$

Tehtävä 6

Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

mukailemalla Esimerkkiä 6.7; vaiheessa II sovella Residylausetta. Älä laske turhia residyjä!

Ratkaisu:

Huomataan aluksi, että $(z^4+1) = (z^2-i)(z^2+i) = 0 \iff z_{1,2} = \pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}$ tai $z_{3,4} = \pm\frac{i-1}{\sqrt{2}}$. Merkitään siis $f\colon \mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2,z_3,z_4\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z^2+i)(z^2-i)}$. f on selvästi analyyttinen määrittelyjoukossaan. Olkoon sitten $R > 1$ ja $\gamma_R\colon [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = t$ sekä $\eta_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\eta_R(t) = Re^{it}$. Nyt $\gamma_R(R) = R = \eta_R(0)$ ja $\gamma_R(-R) = -R = \eta_R(\pi)$, joten $\gamma_R * \eta_R$ on suljettu paloittain säännöllinen polku. Lauseesta 5.16 saadaan nyt

$$\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R*\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Geometrisesti Kuvasta 1 nähdään, että on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$ siten, että $|\gamma_R * \eta_R| \subset B(z_0,r)$ ja $z_2, z_4 \notin B(z_0,r)$. Näin ollen rajoittumakuvaus $f\mid_{B(z_0,r)}$ on analyyttinen kaikkialla muualla paitsi pisteissä z_1, z_3. Koska $1 + z_{1,3}^4 = 0$, l'Hôpitalin säännöllä

$$\lim_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{1+z^4} = \frac{1}{4z_1^3} = -\frac{i+1}{4\sqrt{2}}$$

ja

$$\lim_{z\to z_3} (z-z_3)f(z) = \lim_{z\to z_3} \frac{z-z_3}{1+z^4} = \frac{1}{4z_3^3} = -\frac{i-1}{4\sqrt{2}}.$$

Erityisesti $\lim\limits_{z\to z_{1,3}} |z-z_{1,3}|\,|f(z)| \in\,]0,\infty[$, joten Lauseen 6.16 nojalla $z_{1,3}$ ovat 1. kertaluvun napoja. Lauseen 6.20 mukaan

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) = -\frac{i+1}{4\sqrt{2}}$$

ja

$$\mathrm{Res}(f,z_3) = \lim_{z\to z_3} (z-z_3)f(z) = -\frac{i-1}{4\sqrt{2}}.$$

Residylauseen perusteella

$$\int_{\gamma_R*\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(n(\gamma_R*\eta_R,z_1)\,\mathrm{Res}(f,z_1) + n(\gamma_R*\eta_R,z_3)\,\mathrm{Res}(f,z_3)).$$

Geometrisesti on selvää (Kuva 1), että $n(\gamma_R*\eta_R,z_1) = n(\gamma_R*\eta_R,z_3) = 1$, jolloin

$$\int_{\gamma_R * \eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(-\frac{i+1}{4\sqrt{2}} - \frac{i-1}{4\sqrt{2}} \right) = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Lisäksi integraalien kolmioepäyhtälöstä

$$0 \leq \left| \int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int_{\eta_R} |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_0^\pi \frac{|\eta_R'(t)|}{|1+\eta_R(t)^4|}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\left|iRe^{it}\right|}{|1+R^4e^{4it}|}\,\mathrm{d}t.$$

Käänteisestä kolmioepäyhtälöstä saadaan, että

$$\left|1+R^4e^{4it}\right| \geq \left|\left|R^4e^{4it}\right| - |-1|\right| = \left|R^4-1\right|.$$

Koska $R > 1$, niin $\left|R^4-1\right| = R^4-1$. Näin ollen

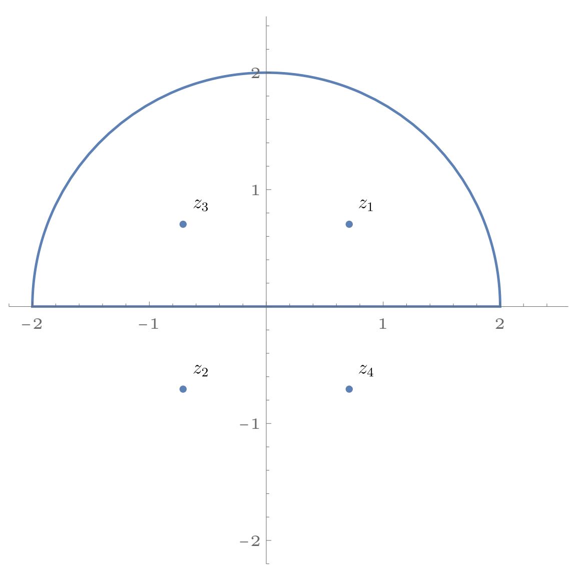
$$\int_0^\pi \frac{\left|iRe^{it}\right|}{|1+R^4e^{4it}|}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Suppiloperiaatteesta seuraa nyt, että

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Siispä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}z}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R * \eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$



Kuva 1: Polun $\gamma_R * \eta_R$ jälki sekä erikoispisteet $z_{1,2,3,4}$.

Tehtävä 7

Kun $1 \neq b > 0$, olkoon $a = \frac{1}{2}(b + 1/b)$. Olkoon $\gamma\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ kun $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Osoita, että

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - a} = 2 \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - ib)(z - i/b)}.$$

(b) Määrää integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5 - 4\sin x}.$$

Ratkaisu:

(a) Merkitään $f(z) = \dfrac{1}{(z - ib)(z - i/b)}$. Tällöin eksponenttifunktion ominaisuuksilla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - ib)(z - i/b)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{(\gamma(t) - ib)(\gamma(t) - i/b)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,\mathrm{d}t}{(e^{it} - ib)\,(e^{it} - i/b)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,\mathrm{d}t}{e^{2it} - (i/b)e^{it} - ibe^{it} - 1} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,\mathrm{d}t}{e^{it}\,(e^{it} - i/b - ib - e^{-it})} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{i\,\mathrm{d}t}{e^{it} - e^{-it} - 2ai} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}i\,(e^{-it} - e^{it}) - a} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t - a} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - a}.
\end{aligned}$$

(b) (a)-kohdan perusteella

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5 - 4\sin x} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5/4 - \sin x} = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \frac{1}{2}(2 + 1/2)} = -\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - 2i)(z - i/2)}.$$

Nyt $2i \notin |\gamma|$, mutta $i/2 \in |\gamma|$. Selvästi

$$\lim_{z \to i/2} |z - i/2|\,|f(z)| = \lim_{z \to i/2} \frac{|z - i/2|}{|z - 2i|\,|z - i/2|} = \lim_{z \to i/2} \frac{1}{|z - 2i|} = \frac{2}{3} \in \,]0, \infty[\,,$$

jolloin piste $i/2$ on 1. kertaluvun napa. Näin ollen Lauseesta 6.20 saadaan, että

$$\operatorname{Res}(f, i/2) = \lim_{z \to i/2} (z - i/2) f(z) = \lim_{z \to i/2} \frac{1}{z - 2i} = \frac{2i}{3}.$$

Geometrisesti on selvää, että $n(\gamma, i/2) = 1$. Residylauseesta saadaan nyt, että

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-2i)(z-i/2)} = 2\pi i n(\gamma, i/2)\operatorname{Res}(f, i/2) = -\frac{4\pi}{3}.$$

Näin ollen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5-4\sin x} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$