Tehtävä 9.1

Osoita, että

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

on ryhmän $\mathbb{C}^\times$ aliryhmä.

Ratkaisu:

Esimeriksi $1 \in \mathbb{S}^1$, joten erityisesti $\mathbb{S}^1 \neq \emptyset$. Olkoon $z, w \in \mathbb{S}^1$. Tällöin kompleksiluvun modulin ominaisuuksilla

$$|zw| = |z|\,|w| = 1 \cdot 1 = 1,$$

joten $zw \in \mathbb{S}^1$. Vastaavasti

$$\left|w^{-1}\right| = \left|\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = \frac{|\overline{w}|}{|w|^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = 1,$$

joten $w^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Siispä aliryhmätestin nojalla $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^\times$ on aliryhmä.

Tehtävä 9.2

Anna esimerkki surjektiivisesta homomorfismista $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Ratkaisu:

Asetetaan $f(t) = \cos t + i \sin t$ ja otetaan $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin edellisen tehtävän ja trigonometristen funktioiden summakaavoilla

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

eli f on homomorfismi. Olkoon sitten $z \in \mathbb{S}^1$, jolloin edellisen tehtävän nojalla $z = \cos t + i \sin t$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Tällöin määritelmän nojalla $f(t) = z$ ja siten f on myös surjektiivinen.

Tehtävä 9.15

Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että jokaisen alkion $g \in G$, joka ei ole neutraalialkio, kertaluku on 2. Osoita, että G on kommutatiivinen ryhmä.

Ratkaisu:

Olkoon $a, b \in G \setminus \{e\}$. Tällöin $a^2 = b^2 = e$, sillä $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = 2$. Lisäksi $ab \in G$, joten $(ab)^2 = e$. Näiden ja assosiatiivisuuden avulla

$$ba = e(ba) = (ab)^2(ba) = (ab)ab^2a = (ab)aea = (ab)a^2 = (ab)e = ab$$

eli G on kommutatiivinen.

Tehtävä 9.21

Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \subset G$ äärellinen vakaa osajoukko, jossa on ainakin yksi alkio. Osoita, että $H \leq G$.

Ratkaisu:

Olkoon $a, b \in H$. Koska H on vakaa, $ab \in H$, joten aliryhmätestin nojalla riittää osoittaa, että $a^{-1} \in H$. Jos $a = e$, niin tällöin $a^{-1} = e = a \in H$. Oletetaan siis, että $a \neq e$. Lisäksi H on äärellinen, joten $\#H = n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. H:n vakaudesta seuraa induktiivisesti, että

$$a, a^2, \ldots, a^{n+1} \in H.$$

Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla täytyy kuitenkin olla $a^i = a^j$ joillakin $1 \leq i < j \leq n + 1$. Supistussääntö pätee ryhmässä G, joten Lemman 1.23 avulla

$$a^{j-i} = e.$$

Nyt $j - i \geq 1$, joten $a^{j-i} = e \in H$ vakauden nojalla. Toisaalta $j - i - 1 \geq 0$ eli jälleen vakauden nojalla

$$a^{j-i-1} \in H.$$

Lemmasta 1.23 saadaan jälleen, että

$$aa^{j-i-1} = a^{j-i} = e = aa^{-1}$$

eli supistussäännöllä

$$a^{-1} = a^{j-i-1} \in H$$

ja väite on siten osoitettu.

Tehtävä 9.25

Todista Propositio 9.24:

Olkoon G aliryhmien H ja J sisäinen suora tulo. Tällöin $G \cong H \times J$.

Ratkaisu:

Sisäisen suoran tulon määritelmästä $G = HJ = \{hj : h \in H, j \in J\}$ sekä $hj = jh$ kaikille $h \in H$ ja $j \in J$. Toisaalta ryhmätulon määritelmästä $H \times J = \{(h, j) : h \in H, j \in J\}$. Olkoon siis $\psi : (G, *) \to (H \times J, \cdot)$ siten, että

$$\psi(g) = \psi(hj) = (h, j)$$

kun ryhmä $H \times J$ varustetaan komponenteittaisella tulolla $\cdot$. Olkoon sitten $a, b \in G = HJ$, jolloin $a = hj$ ja $b = ik$ joillakin $h, i \in H$ ja $j, k \in J$. Tällöin

$$\begin{aligned}\psi(ab) &= \psi((hj)(ik)) = \psi(h(ji)k) = \psi(h(ij)k) = \psi((hi)(jk)) \\ &= (hi, jk) = (h, j)(i, k) = \psi(hj)\psi(jk) = \psi(a)\psi(b)\end{aligned}$$

eli ψ on homomorfismi. Olkoon $\tilde{e} = (e_H, e_J)$, jolloin Seurauksen 8.13 mukaan $\tilde{e} \in H \times J$ on neutraalialkio. Tällöin

$$\begin{aligned}\ker \psi &= \psi^{-1}(\{\tilde{e}\}) = \{g \in G : \psi(g) = \tilde{e}\} \\ &= \{hj \in HJ : \psi(hj) = (h, j) = (e_H, e_J) = \tilde{e}\} \\ &= \{e_H e_J\} = \{e_G\},\end{aligned}$$

joten Proposition 9.9 nojalla ψ on injektio. Olkoon sitten $x \in H \times J$ eli $x = (h, j)$ joillakin $h \in H$, $j \in J$. Tällöin $hj \in HJ = G$ eli $\psi(hj) = (h, j) = x$ eli ψ on surjektio. Löydettiin siis isomorfismi $\psi : (G, *) \to (H \times J, \cdot)$ eli $G \cong H \times J$ ja saatiin väite.

Tehtävä 9.26

Todista Lemma 9.29:

$\mathrm{O}(n) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ratkaisu:

Osoitetaan, että $\mathrm{O}(n)$ on ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aliryhmä. Selvästi $I_n^T I_n = I_n$, joten $I_n \in \mathrm{O}(n)$ ja erityisesti $\mathrm{O}(n) \neq \emptyset$. Olkoon sitten $A, B \in \mathrm{O}(n)$. Transpoosin laskusäännöillä

$$(AB)^T(AB) = B^T(A^TA)B = B^TI_nB = B^TB = I_n \iff AB \in \mathrm{O}(n)$$

ja

$$(B^{-1})^TB^{-1} = (B^T)^{-1}B^{-1} = (BB^T)^{-1} = (I_n)^{-1} = I_n \iff B^{-1} \in \mathrm{O}(n).$$

Aliryhmätestin nojalla $\mathrm{O}(n) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Olkoon sitten $D = \mathrm{diag}(2, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Selvästi $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sillä $\det D = 2 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 2 \neq 0$. Lisäksi D on diagonaalimatriisina symmetrinen, joten $D^T = D$. Kuitenkin

$$D^TD = DD = D^2 = \mathrm{diag}(2^2, 1^2, 1^2, \ldots, 1^2) = \mathrm{diag}(4, 1, 1, \ldots, 1) \neq I_n,$$

joten $D \notin \mathrm{O}(n)$. Siispä täytyy olla $\mathrm{O}(n) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Tehtävä 10.1

Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja olkoon $f : X \to Y$ bijektio. Osoita, että permutaatioryhmät $\mathrm{Perm}(X)$ ja $\mathrm{Perm}(Y)$ ovat isomorfisia.

Ratkaisu:

Olkoon $\psi : \mathrm{Perm}(X) \to \mathrm{Perm}(Y)$ siten, että $\psi(h) = f \circ h \circ f^{-1}$. Kuvaus ψ on hyvin määritelty, sillä f on bijektio eli sillä on käänteisfunktio f^{-1}. Lisäksi funktioiden yhdiste $\circ$ on assosiatiivinen laskutoimitus. Olkoon sitten $g, h \in \mathrm{Perm}(X)$. Tällöin

$$\psi(g \circ h) = f \circ (g \circ h) \circ f^{-1} = f \circ g \circ \mathrm{id} \circ h \circ f^{-1} = (f \circ g \circ f^{-1}) \circ (f \circ h \circ f^{-1}) = \psi(g) \circ \psi(h),$$

sillä $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$, kun f on bijektio. Näin ollen ψ on homomorfismi. Olkoon sitten $\psi^{-1} : \mathrm{Perm}(Y) \to \mathrm{Perm}(X)$, $\psi^{-1}(h) = f^{-1} \circ h \circ f$. Myös ψ^{-1} on hyvin määritelty kuvaus samoilla perusteilla kuin kuvauksen ψ kohdalla. Olkoon sitten $i, j \in \mathrm{Perm}(Y)$, jolloin

$$\psi^{-1}(i \circ j) = f^{-1} \circ (i \circ j) \circ f = f^{-1} \circ i \circ \mathrm{id} \circ j \circ f = (f^{-1} \circ i \circ f) \circ (f^{-1} \circ j \circ f) = \psi^{-1}(i) \circ \psi^{-1}(j),$$

joten ψ^{-1} on homomorfismi. Lisäksi pätee, kun $\lambda \in \mathrm{Perm}(X), \mu \in \mathrm{Perm}(Y)$, että

$$(\psi^{-1} \circ \psi)(\lambda) = \psi^{-1}\left(f \circ \lambda \circ f^{-1}\right) = f^{-1} \circ \left(f \circ \lambda \circ f^{-1}\right) \circ f = \lambda$$

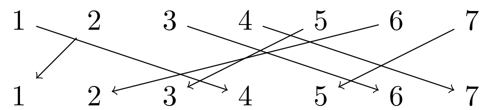
ja

$$(\psi \circ \psi^{-1})(\mu) = \psi\left(f^{-1} \circ \mu \circ f\right) = f \circ \left(f^{-1} \circ \mu \circ f\right) \circ f^{-1} = \mu,$$

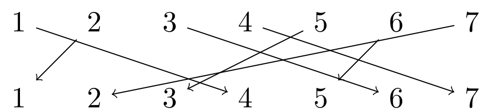
joten ψ^{-1} on kuvauksen ψ käänteisfunktio. Siispä ψ on isomorfismi ja $\mathrm{Perm}(X) \cong \mathrm{Perm}(Y)$, kuten haluttiinkin.

Tehtävä 10.3

Kirjoita permutaatiot (123)(23) ja (1234)(235) ja kaavioita



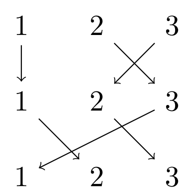
ja



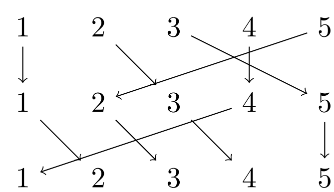
vastaavat permutaatiot erillisten syklien tuloina.

Ratkaisu:

Permutaatiota (123)(23) vastaava kaavio on



josta saadaan, että (123)(23) = (12)(3) = (12). Vastaavasti permutaatiota (1234)(235) vastaa kaavio



joten (1234)(235) = (124)(35). Tehtävänannon ylempi kaavio voidaan kirjoittaa muotoon (1475362) ja vastaavasti alempi kaavio muotoon (1472)(365).