Tehtävä 10.5

Täydennä Proposition 10.5 todistus induktiotodistukseksi:

Jokainen sykli on vaihtojen tulo.

Ratkaisu:

Osoitetaan, että kun $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, niin $(a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_m)(a_1 a_{m-1}) \cdots (a_1 a_2)$. Kun $m = 2$, väite pätee triviaalisti ja perusaskel on siten osoitettu. Oletetaan sitten, että väite pätee jollakin $m = k \in \mathbb{N}$. Nyt, kun $m = k + 1$, niin

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k+1}) = (a_1 a_{k+1})(a_1 a_2 \cdots a_k).$$

Tämä pätee siksi, että kun $1 \leq \ell < k$, ensimmäinen sykli $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ kuvaa $a_\ell \mapsto a_{\ell+1}$. Erityisesti $\ell + 1 \neq 1, k + 1$, joten toinen sykli $(a_1 a_{k+1})$ käyttäytyy kuin identtinen kuvaus. Jos taas $\ell = k$, ensimmäinen sykli kuvaa $a_\ell \mapsto a_1$ ja sitten toinen sykli kuvaa $a_1 \mapsto a_{k+1}$ eli $a_k \mapsto a_{k+1}$. Siispä yhtäsuuruus pätee. Induktio-oletuksesta saadaan sitten, että

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k+1}) = (a_1 a_{k+1})(a_1 a_k) \cdots (a_1 a_2),$$

jolloin väite seuraa induktioperiaatteesta.

Tehtävä 10.6

Osoita, että $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$.

Ratkaisu:

Kirjoitetaan S_3 auki suoraan määritelmästä:

$$\begin{aligned} S_3 &= \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}\} \\ &= \{\mathrm{id}, (23), (12), (123), (132), (13)\}. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} (12)^0 &= \mathrm{id}, \\ (12)^1 &= (12), \\ (23)^1 &= (23), \\ (12)(23) &= (132), \\ (23)(12) &= (123), \\ (12)(23)(12) &= (13) \end{aligned}$$

joten

$$\langle (12), (23) \rangle \supset \{\mathrm{id}, (12), (23), (132), (123), (13)\} = S_3.$$

Koska S_3 sisältää kaikki lukujen $\{1,2,3\}$ permutaatiot, täytyy olla myös $\langle (12), (23) \rangle \subset S_3$. Siispä $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$, kuten haluttiinkin.

Tehtävä 10.7

Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $\alpha_n = (123 \cdots n)$ ja $\beta = (123)$. Määritä permutaatiot

$$\alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \quad \text{ja} \quad \beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta$$

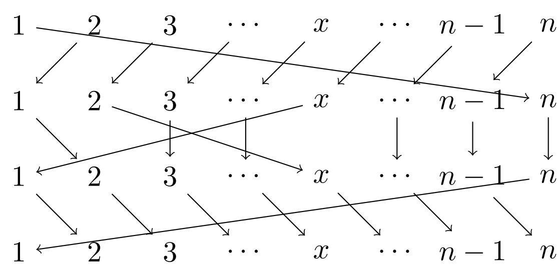
jokaiselle $3 \leq x < n$.

Ratkaisu:

Olkoon $x \in \mathbb{N}$ siten, että $3 \leq x < n$. Merkitään $y = x + 1$. Esimerkin 10.2(c) nojalla $\alpha_n^{-1} = (n \cdots 321)$, joten

$$\alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} = (123 \cdots n)(12x)(n \cdots 321).$$

Permutaatiota vastaavasta kaaviosta



nähdään että kaikki alkiot $k \neq 1, 2, 3, y$ kuvautuvat takaisin itselleen, sillä ensimmäinen sykli $(n \cdots 321)$ kuvaa kaikki alkiot $k \neq 1$ alkioksi $k - 1 \neq 1, 2, x$, jolloin toinen sykli $(12x)$ ei enää vaikuta. Viimeinen sykli palauttaa sitten alkion $k - 1$ takaisin alkioksi k. Tarkastellaan loput tapauksen erikseen. Nyt $1 \mapsto 1$, sillä $1 \to n \to n \to 1$. Vastaavasti $2 \mapsto 3$, sillä $2 \to 1 \to 2 \to 3$ ja $3 \mapsto x + 1$, sillä $3 \to 2 \to x \to x + 1$. Lisäksi $y \mapsto 2$, sillä $y \to x \to 1 \to 2$. Näistä saadaan, että

$$\alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} = (1)(23y) = (23y).$$

Jälleen Esimerkin 10.2(c) nojalla $\beta^{-1} = (321)$, joten

$$\beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta = (321)(23y)(123).$$

Vastaavalla päättelyllä saadaan, että kaikki $k \neq 1, 2, 3, y$ pätee, että $k \mapsto k$. Lisäksi $1 \to 2 \to 3 \to 2$ eli $1 \mapsto 2$, $2 \to 3 \to y \to y$ eli $2 \mapsto y$, $3 \to 1 \to 1 \to 3$ eli $3 \mapsto 3$ sekä $y \to y \to 2 \to 1$ eli $y \mapsto 1$. Siispä

$$\beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta = (12y)(3) = (12y).$$

Tehtävä 10.8

Määritä permutaatiot

- $(1y2)(12x)(12y)$ kaikille $x, y \geq 3$, $x \neq y$ ja
- $(1xt)(1yz)(1tx)$ kaikilla $x, y, t, z > 1$, kun $\#\{x, y, t, z\} = 4$.

Ratkaisu:

- Olkoon $x, y \geq 3$ siten, että $x \neq y$. Kun $k \neq 1, 2, x, y$, niin $k \to k \to k \to k$ eli $k \mapsto k$. Muulloin

$$\begin{aligned} 1 \to 2 \to x \to x &\implies 1 \mapsto x, \\ 2 \to y \to y \to 2 &\implies 2 \mapsto 2, \\ x \to x \to 1 \to y &\implies x \mapsto y, \\ y \to 1 \to 2 \to 1 &\implies y \mapsto 1, \end{aligned}$$

  missä viimeistä riviä lukuunottamatta käytettiin oletusta $x \neq y$. Siispä $(1y2)(12x)(12y) = (1xy)$.

- Olkoon $x, y, t, z > 1$ siten, että kaikki ovat erisuuria. Kun $k \neq 1, x, y, t, z$, niin $k \to k \to k \to k \to k$ eli $k \mapsto k$. Muissa tapauksissa

$$\begin{aligned} 1 \to t \to t \to 1 &\implies 1 \mapsto 1, \\ x \to 1 \to y \to y &\implies x \mapsto y, \\ y \to y \to z \to z &\implies y \mapsto z, \\ t \to x \to x \to t &\implies t \mapsto t, \\ z \to z \to 1 \to x &\implies z \mapsto x, \end{aligned}$$

  missä jokaisella rivillä käytettiin oletusta, että x, y, t, z ovat kaikki erisuuria. Siispä $(1xt)(1yz)(1tx) = (xyz)$.

Tehtävä 10.9

Osoita, että jokaiselle parittomalle $n \geq 5$ pätee $A_n = \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$.

Ratkaisu:

Olkoon $n \geq 5$ pariton. Proposition 10.21 mukaan 3-syklit virittävät alternoivan ryhmän A_n eli $A_n = \langle (abc), \ldots, (\alpha\beta\gamma) \rangle$. Olkoon sitten $x, y, z > 1$ siten, että $\#\{x, y, z\} = 3$. Tehtävän 10.8 nojalla

$$(xyz) = (1xt)(1yz)(1tx),$$

joten kaikki 3-syklit voidaan kirjoittaa muotoa $(1ab)$ olevien syklien kolmitulona. Olkoon siis $w, t \geq 3$ siten, että $w \neq t$. Samasta tehtävästä nähdään, että

$$(1wt) = (1t2)(12w)(12t).$$

Lisäksi

$$(12y)(12y) = (1y2),$$

joten kaikki muotoa $(1ab)$ olevat syklit voidaan kirjoittaa muotoa (12α) olevien syklien tuloina. Tehtävän 10.7 nojalla

$$(321)(123 \cdots n)(12x)(n \cdots 321)(123) = (12y),$$

missä $y = x + 1 \neq x$. Selvästi $(123) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$, jolloin edellisen nojalla myös $(124) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$, sillä $(123), (321) = (123)^{-1}, (123 \cdots n), (n \cdots 321) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$. Induktiivisesti nähdään, että mille tahansa $3 \leq x < n$ pätee, että $(12x) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$. Näin ollen $\{(123), (123 \cdots n)\}$ virittää alternoivan ryhmän A_n, kun n on pariton.

Tehtävä 11.1

Osoita, että $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$ ja määritä aliryhmän $\mathbb{R}_+$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{C}^\times$. Piirrä kuva, joka havainnollistaa sivuluokkien määräämää ositusta.

Ratkaisu:

Samaistetaan reaaliluku $x \in \mathbb{R}_+$ kompleksiluvuksi $x + 0i \in \mathbb{C}^\times$, jolloin $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}^\times$. Tunnetusti $\mathbb{C}^\times$ on ryhmä ja esimerkiksi $1 \in \mathbb{R}_+$, joten erityisesti $\mathbb{R}_+ \neq \emptyset$. Olkoon sitten $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tällöin $x, y > 0$ ja reaalilukujen laskusäännöillä

$$xy > 0 \implies xy \in \mathbb{R}.$$

Selvästi $y^{-1} \in \mathbb{R}$. Lisäksi $yy^{-1} = 1 > 0$ jos ja vain jos $y^{-1} > 0$ eli $y^{-1} \in \mathbb{R}_+$. Siispä aliryhmätestillä $\mathbb{R}_+ \leq \mathbb{C}^\times$. Toisaalta $i \in \mathbb{C}^\times$, sillä $i(-i) = -i^2 = 1$, mutta $i \notin \mathbb{R}$. Siispä $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$.

Olkoon sitten $z, w \in \mathbb{C}^\times$. Proposition 11.4 nojalla

$$\mathbb{R}_+ z = \mathbb{R}_+ w \iff zw^{-1} \in \mathbb{R}_+.$$

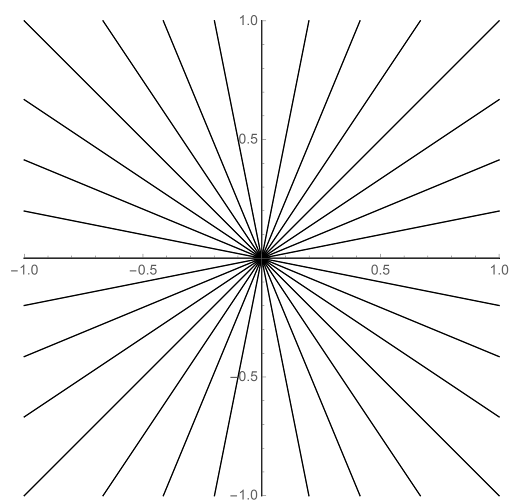
Siispä $z = \xi w$ jollakin $\xi \in \mathbb{R}_+$. Kirjoitetaan sitten z ja w polaarimuotoon:

$$z = r_1 e^{i\theta} \quad \text{ja} \quad w = r_2 e^{i\phi}$$

joillakin $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$. Nyt siis

$$z = \xi w \iff r_1 e^{i\theta} = \xi r_2 e^{i\phi} \iff r_1 = \xi r_2 \quad \text{ja} \quad \theta = \phi.$$

Kaksi alkiota z ja w ovat siis samassa sivuluokassa jos ja vain jos ne ovat samalla origon kautta kulkevalla puolisuoralla. Sivuluokat ovat siis origokeskeisiä säteitä, jotka selvästi muodostavat joukon $\mathbb{C}^\times$ osituksen.



Toisaalta jokainen säde voidaan yksikäsitteisesti kuvata yksikköympyrälle, joten $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_+ \cong \mathbb{S}^1$. Itse asiassa ensimmäinen isomorfismilause (joka ei vielä ole käytössä) antaisi suoraan tämän tuloksen.

Tehtävä 11.2

Todista Propositio 11.4:

Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Tällöin

(1) $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Erityisesti $xH = H$, jos ja vain jos $x \in H$.

(2) $Hx = Hy$, jos ja vain jos $xy^{-1} \in H$. Erityisesti $Hx = H$, jos ja vain jos $x \in H$.

Ratkaisu:

Olkoon $x, y \in G$.

(1) Oletetaan aluksi, että $xH = yH$. Tällöin jokaiselle $z \in H$ pätee, että $xz = yz'$ jollakin $z' \in G$. Tästä saadaan, että $y^{-1}xz = z'$ ja siten $y^{-1}x = z'z^{-1}$. Nyt $z'z^{-1} \in H$, joten $y^{-1}x \in H$.

Oletetaan sitten, että $y^{-1}x \in H$. Tämä tarkoittaa, että on jokin $z' \in H$ siten, että $y^{-1}x = z'$. Tästä saadaan, että $x = yz'$. Tällöin mielivaltaiselle $z \in H$ pätee, että $xz = yz'z$. Sivuluokan xH mielivaltainen alkio on muotoa xz, ja koska $z'z \in H$, niin $xH \subset yH$. Toisaalta $y^{-1}x \in H$ jos ja vain jos $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y \in H$, jolloin vastaavalla päättelyllä saadaan, että $yH \subset xH$. Siispä $xH = yH$.

Asettamalla $y = e$ saadaan, että $xH = eH = H$ jos ja vain jos $e^{-1}x = ex = x \in H$.

(2) Tämän kohdan todistus on käytännössä täysin sama kuin edellisen kohdan, järjestys vain vaihtuu. Täydellisyyden nimissä kirjoitetaan sekin kuitenkin auki.

Oletetaan aluksi, että $Hx = Hy$. Tällöin jokaiselle $z \in H$ pätee, että $zx = z'y$ jollakin $z' \in G$. Tästä saadaan, että $zxy^{-1} = z'$ ja siten $xy^{-1} = z^{-1}z'$. Nyt $z^{-1}z' \in H$, joten $xy^{-1} \in H$.

Oletetaan sitten, että $xy^{-1} \in H$. Tämä tarkoittaa, että on jokin $z' \in H$ siten, että $xy^{-1} = z'$. Tästä saadaan, että $x = z'y$. Tällöin mielivaltaiselle $z \in H$ pätee, että $zx = zz'y$. Sivuluokan Hx mielivaltainen alkio on muotoa zx, ja koska $zz' \in H$, niin $Hx \subset Hy$. Toisaalta $xy^{-1} \in H$ jos ja vain jos $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, jolloin vastaavalla päättelyllä saadaan, että $Hy \subset Hx$. Siispä $Hx = Hy$.

Asettamalla $y = e$ saadaan, että $Hx = He = H$ jos ja vain jos $xe^{-1} = xe = x \in H$.

Tehtävä 11.3

Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että tekijäjoukkojen välinen kuvaus $b : G/H \to H\backslash G$, $b(aH) = Ha^{-1}$ on bijektio.

Ratkaisu:

Osoitetaan ensin, että kuvaus b on hyvin määritelty. Oletetaan siis, että sivuluokille $xH, yH \in G/H$ pätee $xH = yH$. Proposition 11.4 nojalla

$$xH = yH \iff y^{-1}x \in H$$

ja

$$Hx^{-1} = Hy^{-1} \iff x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H.$$

Jokaisella ryhmän alkiolla on käänteisalkio, joten $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(y^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in H$. Siispä

$$\begin{aligned} b(xH) = b(yH) &\iff Hx^{-1} = Hy^{-1} \iff x^{-1}y \in H \\ &\iff (y^{-1}x)^{-1} \in H \iff y^{-1}x \in H \\ &\iff xH = yH. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että b on hyvin määritelty kuvaus. Samasta saadaan myös suoraan injektiivisyys. Olkoon sitten $Hz \in H\backslash G$. Tällöin

$$b(z^{-1}H) = H(z^{-1})^{-1} = Hz,$$

missä $z^{-1}H \in H/G$. Siispä b on myös surjektio. Nämä yhdistämällä saadaan, että b on bijektio ja väite on siten osoitettu.