Tehtävä 12.6

Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \emptyset$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \trianglelefteq G$, $i \in I$. Osoita, että

$$\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G.$$

Ratkaisu:

Proposition 9.10 mukaan $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$. Olkoon sitten $g \in G$ ja $h \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $h \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin

$$ghg^{-1} \in H_i$$

kaikilla $i \in I$, sillä oletuksen mukaan H_i ovat normaaleja aliryhmiä. Erityisesti

$$ghg^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i,$$

joten Proposition 12.5 nojalla $\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.

Tehtävä 12.8

Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times$.

Ratkaisu:

Olkoon $\psi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ siten, että $\psi(z) = z^2$. Nyt, kun $z, w \in \mathbb{C}^\times$, niin

$$\psi(zw) = (zw)^2 = z^2w^2 = \psi(z)\psi(w)$$

eli ψ on homomorfismi. Olkoon sitten $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Tällöin on olemassa $\beta = \sqrt{\alpha} \in \mathbb{C}^\times$ siten, että

$$\alpha = \psi(\beta).$$

Siispä $\operatorname{Im}\psi = \mathbb{C}^\times$. Toisaalta $\psi(1) = \psi(-1) = 1$, mutta kaikilla $a + bi \in \mathbb{C}^\times$, $a \notin \{-1, 0, 1\}$, pätee

$$\psi(a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Jotta $\psi(a + bi) = 1$, täytyisi olla $b = 0$, mutta tällöin

$$\psi(a + bi) = a^2 \neq 1,$$

joten $\ker\psi = \{-1, 1\}$. 1. isomorfismilauseen nojalla nyt

$$\mathbb{C}^\times/\ker\psi = \mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times = \operatorname{Im}\psi$$

ja saatiin väite.

Tehtävä 12.10

Olkoot $N_1 \trianglelefteq G_1$ ja $N_2 \trianglelefteq G_2$. Osoita, että $N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ ja

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

Ratkaisu:

Ensinnäkin $N_1 \times N_2 \leq G_1 \times G_2$, sillä koska $N_1 \times N_2 \subset G_1 \times G_2$, niin koska Seurauksen 8.13 mukaan $N_1 \times N_2$ on ryhmä, joten $N_1 \times N_2 \leq G_1 \times G_2$. Olkoon sitten $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ja $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$, jolloin $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}) \in G_1 \times G_2$. Tällöin

$$(g_1, g_2)(n_1, n_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(n_1, n_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 n_1 g_1^{-1}, g_2 n_2 g_2^{-1}).$$

Koska oletuksen mukaan $N_1 \trianglelefteq G_1$ ja $N_2 \trianglelefteq G_2$, niin Proposition 12.5 mukaan $g_1 n_1 g_1^{-1} \in N_1$ ja $g_2 n_2 g_2^{-1} \in N_2$, joten

$$(g_1, g_2)(n_1, n_2)(g_1, g_2)^{-1} \in N_1 \times N_2,$$

jolloin jälleen Propositiosta 12.5 saadaan, että $N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

Merkitään sitten $\phi \colon G_1 \times G_2 \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ siten, että

$$\phi(g_1, g_2) = (g_1 N_1, g_2 N_2).$$

Selvästi $\operatorname{Im} \phi = (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$. Lisäksi Proposition 11.4 mukaan

$$g_1 N_1 = N_1 \iff g_1 \in N_1$$

ja vastaavasti

$$g_2 N_2 = N_2 \iff g_2 \in N_2.$$

Näin ollen $\ker \phi = N_1 \times N_2$, joten 1. isomorfismilauseen nojalla

$$(G_1 \times G_2)/\ker \phi = (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2) = \operatorname{Im} \phi.$$

Tehtävä 12.13

Todista Propositio 12.22:

Olkoon G ryhmä ja olkoot $N \trianglelefteq G$ ja $T \leq G$. Tällöin

$$NT = TN = \langle N \cup T \rangle \leq G.$$

Ratkaisu:

Selvästi

$$NT = \{nt : n \in N, t \in T\} \subset G$$

ja

$$TN = \{tn : n \in N, t \in T\} \subset G.$$

Osoitetaan, että $TN \leq G$. Selvästi $TN \neq \emptyset$, joten olkoon $t_1 n_1, t_2 n_2 \in TN$. Tällöin Proposition 12.5 ja oletuksen $N \trianglelefteq G$ mukaan

$$(t_1 n_1)(t_2 n_2)^{-1} = (t_1 n_1)(n_2^{-1} t_2^{-1}) = t_1 (n_1 n_2^{-1}) t_2^{-1} \in N \subset TN.$$

Aliryhmätestistä seuraa nyt, että $TN \leq G$. Osoitetaan sitten, että $NT = TN$. Olkoon $tn \in TN$, jolloin Proposition 12.5 mukaan

$$tnt^{-1} \in N,$$

joten

$$tnt^{-1}t = tn \in NT.$$

Siispä $TN \subset NT$. Vastaavasti olkoon $nt \in NT$, jolloin

$$t^{-1}nt \in N$$

ja siten

$$tt^{-1}nt = nt \in TN$$

eli $NT \subset TN$. Nämä yhdistämällä $NT = TN$, jolloin Propositiosta 9.12 saadaan, että

$$NT = TN = \langle N \cup T \rangle \leq G.$$

Tehtävä 13.1

Olkoon $n \geq 3$ luonollinen luku. Osoita, että $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

Ratkaisu:

Selvästi $D_n = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n = P_n\} \subset \mathrm{O}(2)$. Lisäksi $I_n \in \mathrm{O}(2)$ ja $I_n P_n = P_n$, joten $I_n \in D_n$. Erityisesti $D_n \neq \emptyset$. Olkoon sitten $A, B \in D_n$, jolloin siis $AP_n = P_n$ ja $BP_n = P_n$. Tällöin

$$(AB)P_n = A(BP_n) = AP_n = P_n$$

eli $AB \in D_n$. Toisaalta $B^{-1}BP_n = P_n = B^{-1}P_n$, joten $B^{-1} \in D_n$. Aliryhmätestin nojalla $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

Tehtävä 13.2

Todista Lemma 13.8:

Olkoon $n \geq 3$, olkoon $\theta \in \mathbb{R}$ ja olkoon $P_n^\theta = r_\theta(P_n)$. Ryhmät D_n ja $\{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^\theta = P_n^\theta\}$ ovat isomorfiset.

Ratkaisu:

Merkitään $D_n^\theta = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^\theta = P_n^\theta\}$ ja asetetaan $\phi \colon D_n \to D_n^\theta$ siten, että $\phi(A) = r_\theta A r_\theta^{-1}$. Tällöin kaikille $A, B \in D_n$ pätee

$$\phi(AB) = r_\theta(AB)r_\theta^{-1} = \left(r_\theta A r_\theta^{-1}\right)\left(r_\theta B r_\theta^{-1}\right) = \phi(A)\phi(B).$$

Olkoon sitten $D \in D_n^\theta$, jolloin $DP_n^\theta = Dr_\theta P_n = r_\theta P_n = P_n^\theta$. Valitaan $C = r_\theta^{-1} D r_\theta \in \mathrm{O}(2)$, jolloin

$$CP_n = r_\theta^{-1} D r_\theta = r_\theta^{-1}(Dr_\theta P_n) = r_\theta^{-1} r_\theta P_n = P_n,$$

eli $C \in D_n$. Lisäksi $\phi(C) = D$, joten $\operatorname{Im} \phi = D_n^\theta$. Toisaalta

$$\phi(X) = r_\theta X r_\theta^{-1} = I_n \iff X r_\theta^{-1} = r_\theta^{-1} I_n = r_\theta^{-1} \iff X = r_\theta^{-1} r_\theta = I_n$$

eli $\ker \phi = \{I_n\}$. Siispä ϕ on isomorfismi ja $D_n \cong D_n^\theta$.

Tehtävä 13.4

Osoita, että $E(n)$ on ryhmä.

Ratkaisu:

Olkoon $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $b \in \mathbb{R}^n$ ja osoitetaan, että $E_{A,b} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $E_{A,b}(x) = Ax + b$, on bijektio. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$, jolloin yhtälöllä

$$y = E_{A,b}(x) = Ax + b$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $x = A^{-1}(y - b)$, sillä koska $A \in \mathrm{O}(n)$, niin $\det A \neq 0$. Näin ollen $E_{A,b}$ on bijektio, joten erityisesti $E(n) = \{E_{A,b} : A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$.

Osoitetaan sitten, että $E(n) \leq \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$, jolloin erityisesti $E(n)$ on ryhmä. Ensinnäkin identtiselle kuvaukselle $\mathrm{id} \in E(n)$, sillä $\mathrm{id}(x) = x = I_n x + 0$, missä $I_n \in \mathrm{O}(n)$ ja $0 \in \mathbb{R}^n$. Siispä $E(n) \neq \emptyset$. Olkoon sitten $f, g \in E(n)$ eli $f(x) = Ax + b$ ja $g(x) = Cx + d$ joillakin $A, C \in \mathrm{O}(n)$ ja $b, d \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$(f \circ g)(x) = A(Cx + d) + b = (AC)x + (Ad + b),$$

missä $AC \in \mathrm{O}(n)$ ja $Ad + b \in \mathbb{R}^n$, joten $f \circ g \in E(n)$. Nähdään helposti, että $g^{-1}(x) = C^{-1}(x - d)$, sillä tällöin $g(g^{-1}(x)) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Lisäksi

$$g^{-1}(x) = C^{-1}x - C^{-1}d,$$

missä $C^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ ja $C^{-1}d \in \mathbb{R}^n$. Siispä $g^{-1} \in E_{A,b}$. Väite seuraa nyt aliryhmätestistä.

Tehtävä 13.5

Osoita, että $T(n) \triangleleft E(n)$ ja että $E(n)/T(n) \cong \mathrm{O}(n)$ ja että $E(n) = T(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$.

Ratkaisu:

Selvästi $T(n) = \{E_{I_n,b} \in E(n) : b \in \mathbb{R}^n\} \subset E(n)$. Osoitetaan ensin, että $T(n) < E(n)$. Selvästi $\mathrm{id} \in T(n)$, sillä $\mathrm{id}(x) = x = I_n x + 0$, missä $0 \in \mathbb{R}^n$. Siispä $T(n) \neq \emptyset$. Olkoon siis $f, g \in T(n)$, jolloin $f(x) = I_n x + b$ ja $g(x) = I_n x + c$ joillakin $b, c \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$(f \circ g)(x) = I_n(I_n x + c) + b = I_n x + I_n c + b = I_n x + c + b,$$

missä $c + b \in \mathbb{R}^n$, joten $f \circ g \in T(n)$. Toisaalta $g^{-1} = I_n x - c$, sillä $g(g^{-1}(x)) = I_n(I_n x - c) + c = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, joten $g^{-1} \in T(n)$. Näin ollen aliryhmätestistä seuraa, että $T(n) \leq E(n)$. Kuitenkin kuvaukselle $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ pätee $h \in E(n)$, mutta $h \notin T(n)$, joten $T(n) < E(n)$.

Olkoon sitten $e \in E(n)$ ja $t \in T(n)$, jolloin $e(x) = Ax + b$, $t(x) = I_n x + c$ ja $e^{-1}(x) = A^{-1}(x - b)$ joillakin $A \in \mathrm{O}(n)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$(e \circ t \circ e^{-1})(x) = x + Ac = I_n x + Ac,$$

missä $Ac \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen $e \circ t \circ e^{-1} \in T(n)$ eli Proposition 12.5 mukaan $T(n) \triangleleft E(n)$.

Olkoon nyt $\varphi\colon E(n) \to \mathrm{O}(n)$ siten, että $\varphi(Ax + b) = A$. Kun $f, g \in E(n)$ eli $f(x) = Ax + b$ ja $g(x) = Cx + d$ joillakin $A, C \in \mathrm{O}(n)$ ja $b, d \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\varphi(f \circ g) = \varphi(A(Cx + d) + b) = \varphi(AC + Ad + b) = AC = \varphi(f)\varphi(g)$$

eli φ on homomorfismi. Olkoon sitten $K \in \mathrm{O}(n)$, jolloin asettamalla $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siten, että $i(x) = Kx$ saadaan, että $K = \varphi(h)$. Siispä $\operatorname{Im} \varphi = \mathrm{O}(n)$. Toisaalta

$$\ker \varphi = \{j \in E(n) : \varphi(j) = e = I_n\} = T(n),$$

joten 1. isomorfismilauseen mukaan

$$E(n)/\ker \varphi = E(n)/T(n) \cong \mathrm{O}(n) = \operatorname{Im} \varphi.$$

Olkoon sitten $t \in T(n)$ ja $o \in \mathrm{O}(n)$, jolloin $t(x) = I_n x + b$ jollakin $b \in \mathbb{R}^n$ ja $o(x) = Ax$ jollakin $A \in \mathrm{O}(n)$, kun samaistetaan matriisi A lineaarikuvaukseksi $x \mapsto Ax$. Tällöin

$$(t \circ o)(x) = t(Ax) = I_n(Ax) + b = Ax + b,$$

joten

$$T(n)\,\mathrm{O}(n) = \{t \circ o : t \in T(n), o \in \mathrm{O}(n)\} = E(n).$$

Lisäksi $T(n) \cap \mathrm{O}(n) = \{I_n\} = \{\mathrm{id}\}$, joten $E(n) = T(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$ ja saatiin väite.