Tehtävä 1

Tutki onko funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ differentioituva pisteessä $(0,0)$. Määrää $Df(0,0)$ mikäli se on olemassa.

Ratkaisu:

Esimerkiksi kuvaajan perusteella näyttäisi siltä, että f ei ole differentioituva origossa. Osoitetaan tämä. Olkoon $\overline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, jolloin $\|\overline{e}\| = 1$. Suuntaisderivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{e}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{0} + h\overline{e}) - f(\overline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\overline{e})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\left|\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\right|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{\sqrt{2}h}.
\end{aligned}$$

Kyseistä raja-arvoa ei ole olemassa, sillä

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{\sqrt{2}h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{\sqrt{2}h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq -\frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{\sqrt{2}h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{\sqrt{2}h}.$$

Siispä suuntaisderivaattaa $\partial_{\overline{e}} f(0,0)$ ei ole olemassa, joten f ei voi olla differentioituva origossa (jos f olisi differentioituva, silloin sen kaikki suuntaisderivaatat olisivat olemassa).

Tehtävä 2

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva joukossa $\mathbb{R}^n$. Määritellään $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\varphi(\overline{x}) = (\overline{x}, f(\overline{x})).$$

(a) Osoita, että φ on jatkuvasti differentioituva joukossa $\mathbb{R}^n$ ja määrää $D\varphi(\overline{x})$ kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Osoita, että vektorit $\partial_1\varphi(\overline{x}), \partial_2\varphi(\overline{x}), \ldots, \partial_n\varphi(\overline{x})$ ovat lineaarisesti riippumattomia vektoreita kaikille $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ratkaisu:

(a) Vektorianalyysi 1 -kurssilta tiedetään, että kuvaus φ on jatkuvasti differentioituva jos ja vain jos sen kaikki koordinaattifunktiot φ_i ovat jatkuvasti differentioituvia. Nyt

$$\varphi(\overline{x}) = (\overline{x}, f(\overline{x})) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, f(\overline{x})),$$

missä oletuksen nojalla f on jatkuvasti differentioituva sekä selvästi koordinaattikuvaukset $\overline{x} \mapsto x_i$ kaikilla $1 \leq i \leq n$ ovat jatkuvasti differentioituvia, joten φ on jatkuvasti differentioituva. Derivaattamatriisiksi tulee siten

$$D\varphi(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \nabla\varphi_1(\overline{x})^T \\ \nabla\varphi_2(\overline{x})^T \\ \vdots \\ \nabla\varphi_n(\overline{x})^T \\ \nabla\varphi_{n+1}(\overline{x})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \partial_1 f(\overline{x}) & \partial_2 f(\overline{x}) & \cdots & \partial_n f(\overline{x}) \end{bmatrix}.$$

(b) Huomataan heti alkuun, että kun $1 \leq i \leq n$, niin

$$\partial_i\varphi(\overline{x}) = (\partial_i(\overline{x}), \partial_i f(\overline{x})) = (\overline{e}_i, \partial_i f(\overline{x})).$$

Tarkastellaan sitten yhtälöä

$$\lambda_1\partial_1\varphi(\overline{x}) + \lambda_2\partial_2\varphi(\overline{x}) + \cdots + \lambda_n\partial_n\varphi(\overline{x}) = \overline{0}.$$

Kirjoitetaan edellinen yhtälö muotoon

$$\lambda_1(\overline{e}_1, \partial_1 f(\overline{x})) + \lambda_2(\overline{e}_2, \partial_2 f(\overline{x})) + \cdots + \lambda_n(\overline{e}_n, \partial_n f(\overline{x})) = \overline{0}.$$

Jotta yhtälö toteutuu, täytyy olla

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \cdots + \lambda_n\overline{e}_n = \overline{0}.$$

Koska standardikantavektorit $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, tämän yhtälön ainoat ratkaisut ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Siispä määritelmän mukaan myös vektorit $\{(\overline{e}_1, \partial_1 f(\overline{x})), (\overline{e}_2, \partial_2 f(\overline{x})), \ldots, (\overline{e}_n, \partial_n f(\overline{x}))\}$ ja siten $\{\partial_1\varphi(\overline{x}), \partial_2\varphi(\overline{x}), \ldots, \partial_n\varphi(\overline{x})\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, kuten haluttiinkin.

Tehtävä 3

Olkoon $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ ja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Laske osittaisderivaatta $\partial_{11}(f \circ g)(0, \frac{\pi}{4})$.

Ratkaisu:

Ketjusäännöllä

$$\begin{aligned}
\partial_1(f \circ g)(x, y) &= \sum_{\ell=1}^{m} \partial_\ell f(g(x, y))\partial_1 g_\ell(x, y) \\
&= \partial_1 f(g(x, y))\partial_1 g_1(x, y) + \partial_2 f(g(x, y))\partial_1 g_2(x, y) \\
&= \partial f(g(x, y))e^x \cos y + \partial_2 f(g(x, y))e^x \sin y.
\end{aligned}$$

Tällöin summan ja tulon derivaatalla

$$\begin{aligned}
\partial_1(\partial_1(f \circ g)(x, y)) &= \partial_1(\partial_1 f(g(x, y))e^x \cos y) + \partial_1(\partial_2 f(g(x, y))e^x \sin y) \\
&= \cos y(\partial_1(\partial_1 f(g(x, y)))e^x + \partial_1 f(g(x, y))e^x) \\
&\quad + \sin y(\partial_1(\partial_2 f(g(x, y)))e^x + \partial_2 f(g(x, y))e^x) \\
&= e^x\{\cos y[\partial_1(\partial_1 f(g(x, y))) + \partial_1 f(g(x, y))] \\
&\quad + \sin y[\partial_1(\partial_2 f(g(x, y))) + \partial_2 f(g(x, y))]\}.
\end{aligned}$$

Jälleen ketjusäännöllä

$$\begin{aligned}
\partial_1(\partial_1 f(g(x, y))) &= \sum_{\ell=1}^{m} \partial_\ell \partial_1 f(g(x, y))\partial_1 g_\ell(x, y) \\
&= \partial_{11} f(g(x, y))e^x \cos y + \partial_{21} f(g(x, y))e^x \sin y
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\partial_1(\partial_2 f(g(x, y))) &= \sum_{\ell=1}^{m} \partial_\ell \partial_2 f(g(x, y))\partial_2 g_\ell(x, y) \\
&= -\partial_{12} f(g(x, y))e^x \sin y + \partial_{22} f(g(x, y))e^x \cos y.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä ja sieventämällä

$$\begin{aligned}
\partial_{11}(f \circ g)(x, y) &= e^x\{\cos y[e^x(\partial_{11} f(g(x, y)) \cos y + \partial_{21} f(g(x, y)) \sin y) + \partial_1 f(g(x, y))] \\
&\quad + \sin y[e^x(-\partial_{12} f(g(x, y)) \sin y + \partial_{22} f(g(x, y)) \cos y) + \partial_2 f(g(x, y))]\} \\
&= e^x(e^x \cos^2 y \partial_{11} f(g(x, y)) + e^x \sin y \cos y \partial_{21} f(g(x, y)) + \partial_1 f(g(x, y)) \\
&\quad - e^x \sin^2 y \partial_{12} f(g(x, y)) + e^x \sin y \cos y \partial_{22} f(g(x, y)) + \partial_2 f(g(x, y))).
\end{aligned}$$

Lasketaan sitten arvo pisteessä $(0, \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned}\partial_{11}(f\circ g)(0,\tfrac{\pi}{4}) = &\frac{1}{2}\partial_{11}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\partial_{21}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\partial_1 f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &-\frac{1}{2}\partial_{12}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\partial_{22}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\partial_2 f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Koska $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^)$, niin Clairaut'n lauseella $\partial_{12}f(x,y) = \partial_{21}f(x,y)$, joten sekatermit kumoavat toisensa:

$$\partial_{11}(f\circ g)(0,\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\left[\partial_{11}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\partial_{22}f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]+\partial_1 f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\partial_2 f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vastaus on luultavasti vain sinnepäin, sillä pitäisin sitä pienenä ihmeenä jos johonkin välivaiheeseen ei olisi tullut jotain laskuvirhettä.

Tehtävä 4

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differentioituva joukossa Ω. Olkoot lisäksi $\overline{x}, \overline{x}_0 \in \Omega$ sellaisia, että

$$t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0 \in \Omega \text{ kaikilla } t \in [0,1]\,.$$

Osoita, että olemassa $\theta \in\,]0,1[$, jolle

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0) + \nabla f(\theta\overline{x} + (1-\theta)\overline{x}_0) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0).$$

Ratkaisu:

Määritellään $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = f(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0)$, jolloin ketjusäännöllä

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= f'(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0) \\
&= f'(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) \\
&= \nabla f(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0)^T(\overline{x} - \overline{x}_0) \\
&= \nabla f(t\overline{x} + (1-t)\overline{x}_0) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0).
\end{aligned}$$

Nyt yhden muuttujan väliarvolauseen nojalla on olemassa $\theta \in\,]0,1[$ siten, että

$$\psi'(\theta) = \frac{\psi(1) - \psi(0)}{1-0} = \psi(1) - \psi(0).$$

Tästä saadaan suoraan, että

$$\psi'(\theta) = \nabla f(\theta\overline{x} + (1-\theta)\overline{x}_0) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) = \psi(1) - \psi(0),$$

ja siten saatiin väite.

Tehtävä 5

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ kun } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Osoita, että f on jatkuvasti differentioituva koko tasossa, osittaisderivaatat $\partial_{12} f(x,y)$ ja $\partial_{21} f(x,y)$ ovat olemassa ja $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$. Onko $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$?

Ratkaisu:

Osittaisderivaatoiksi tulee

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ja

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Osoitetaan, että osittaisderivaatat ovat jatkuvia, mistä seuraa, että f on jatkuvasti differentioituva joukossa $\mathbb{R}^2$. Merkitään $z = z(x,y) = \max\{x,y\}$, jolloin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{|y|^5}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|y|^3 x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq \frac{|z|^5}{z^4} + \frac{|z|^5}{z^4} = 2|z| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{3|x|^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|x| y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq \frac{3|z|^5}{z^4} + \frac{|z|^5}{z^4} = 4|z| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0. \end{aligned}$$

Siispä suppiloperiaatteella $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$ ovat jatkuvia origossa. Muualla tasossa jatkuvuus seuraa siitä, että $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$ ovat jatkuvien kuvausten summia, tuloja ja osamääriä. Lasketaan sitten sekaderivaatat origossa suoraan määritelmästä, jolloin saadaan

$$\partial_{12} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(\overline{0} + t\overline{e}_1) - \partial_2 f(\overline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

ja

$$\partial_{21} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(\overline{0} + t\overline{e}_2) - \partial_1 f(\overline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5/t^4}{t} = 1.$$

Nyt siis $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$, mutta kun $(x,y) \neq (0,0)$, niin

$$\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = \frac{y^2(y^4 + 6x^2y^2 - 3x^4)}{(x^2+y^2)^3},$$

erityisesti sekaderivaatat ovat olemassa.

Tehtävä 6

(Versio Rollen lauseesta ks. JMA3) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on differentioituva joukossa $\operatorname{int} D$ ja $f(\overline{x}) = 0$ kaikilla $\overline{x} \in \partial D$. Osoita, että on olemassa $\overline{x}_0 \in \operatorname{int} D$ siten, että

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}.$$

Ratkaisu:

Jos f on vakiofunktio joukossa $\overline{D}$, niin tällöin oletuksen $f(\overline{x}) = 0$ kaikilla $\overline{x} \in \partial D$ mukaan täytyy olla $f(\overline{x}) \equiv 0$, jolloin mille tahansa $\overline{x}_0 \in \operatorname{int} D$ pätee, että $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$.

Oletetaan siis, että f ei ole vakio. Koska $\overline{D}$ on aina suljettu, saadaan rajoittuneisuuden oletuksesta, että $\overline{D}$ on kompakti. Tällöin f saavuttaa jossakin pisteessä $\overline{x}_0 \in \overline{D}$ maksiminsa (Vektorianalyysi 1). Oletuksen nojalla $f(\overline{x}) = 0$ reunalla ∂D, ja koska f on ei-vakio, täytyy maksimipisteelle $\overline{x}_0$ päteä $f(\overline{x}_0) > 0$. Jos näin ei olisi, täytyisi olla $f(\overline{x}) \equiv 0$, mikä on vastoin oletusta siitä, että f ei ole vakiokuvaus.

Näin ollen maksimipiste ei voi olla reunalla eli $\overline{x}_0 \in \operatorname{int} D$, sillä muuten $f(\overline{x}_0) = 0 \not> 0$. Nyt Vektorianalyysi 1-kurssilta tiedetään, että tällaisessa avoimessa joukossa $\operatorname{int} D$ funktion f gradientti häviää lokaalissa maksimissa eli $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$. Siispä löydettiin haluttu $\overline{x}_0$ ja väite on siten osoitettu.

Huomautetaan, että tehtävän olisi hyvinkin voinut tehdä myös minimin avulla, jolloin olisi tullut $f(\overline{z}_0) < 0$. Maksimi valittiin mukavuussyistä.

Tehtävä 7

Olkoot $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, $\overline{x}_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}_0, r) \subset \Omega$. Kiinnitetään $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ ja määritellään $g : B((0,0), r) \to \mathbb{R}$,

$$g(u, v) = f(\overline{x}_0 + u\overline{e}_i + v\overline{e}_j).$$

Osoita, että $g \in \mathcal{C}^2(B((0,0), r)$ ja

$$\partial_{12} g(0,0) = \partial_{ij} f(\overline{x}_0) \text{ ja } \partial_{21} g(0,0) = \partial_{ji} f(\overline{x}_0).$$

Ratkaisu:

Olkoon $h : B((0,0), r) \to \mathbb{R}^n$, $h(u,v) = \overline{x}_0 + u\overline{e}_i + v\overline{e}_j$. Tällöin huomataan, että $g(u,v) = f(h(u,v)) = (f \circ h)(u,v)$. Nyt ketjusäännön avulla

$$\partial_1 g(u,v) = \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell f(h(u,v)) \partial_1 h_\ell(u,v).$$

Kuvauksen h määritelmästä johtuen vain koordinaattifunktio h_i riippuu muuttujasta u, sillä oletuksesta $i \neq j$. Näin ollen $\partial_1 h_\ell(u,v) = \delta_{\ell i}$, missä δ on Kroneckerin deltafunktio. Siispä

$$\partial_1 g(u,v) = \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell f(h(u,v)) \delta_{\ell i} = \partial_i f(h(u,v)).$$

Vastaavalla päättelyllä $\partial_2 h_\ell(u,v) = \delta_{\ell j}$, joten

$$\partial_2 g(u,v) = \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell f(h(u,v)) \delta_{\ell j} = \partial_j f(h(u,v)).$$

Jälleen ketjusäännöllä

$$\begin{aligned} \partial_{12} g(u,v) = \partial_1(\partial_j f(h(u,v)) &= \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell \partial_j f(h(u,v)) \overbrace{\partial_1 h_\ell(u,v)}^{\delta_{\ell i}} \\ &= \partial_i \partial_j f(h(u,v)) = \partial_{ij} f(h(u,v)). \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} \partial_{21} g(u,v) = \partial_2(\partial_i f(h(u,v)) &= \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell \partial_i f(h(u,v)) \overbrace{\partial_2 h_\ell(u,v)}^{\delta_{\ell j}} \\ &= \partial_j \partial_i f(h(u,v)) = \partial_{ji} f(h(u,v)). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\partial_{12} g(0,0) = \partial_{ij} f(h(0,0)) = \partial_{ij} f(\overline{x}_0)$$

ja

$$\partial_{21}g(0,0) = \partial_{ji}f(h(0,0)) = \partial_{ji}f(\overline{x}_0).$$

Lisäksi oletuksen nojalla $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ja selvästi $h \in \mathcal{C}^2(B((0,0),r))$, jolloin $\partial_{ij}f(h(u,v))$ ja $\partial_{ji}f(h(u,v))$ ovat jatkuvia. Tästä seuraa, että $\partial_{12}g(u,v)$ ja $\partial_{21}g(u,v)$ ovat jatkuvia ja siten $g \in \mathcal{C}^2(B((0,0),r))$, mistä saatiin väite.