Tehtävä 1

Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu joukko. Osoita, että on olemassa jatkuva $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että $f^{-1}(0) = S$.

Ratkaisu:

Asetetaan $f(\overline{x}) = d(\overline{x}, S) = \inf\limits_{\overline{s} \in S}\{d(\overline{x}, \overline{s}) : \overline{s} \in S\}$ ja osoitetaan, että f on jatkuva[1] ja että $S = f^{-1}(0)$. Olkoon $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, jolloin kolmioepäyhtälöllä

$$f(\overline{x}) \leq d(\overline{x}, \overline{s}) \leq d(\overline{x}, \overline{y}) + d(\overline{y}, \overline{s}) \iff f(\overline{x}) - d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{y}, \overline{s})$$

kaikilla $\overline{s} \in S$. Infimumin määritelmästä

$$f(\overline{x}) - d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{y}, S) = f(\overline{y}),$$

joten

$$f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{y}).$$

Vastaavasti

$$f(\overline{y}) \leq d(\overline{y}, \overline{s}) \leq d(\overline{y}, \overline{x}) + d(\overline{x}, \overline{s}) \iff f(\overline{y}) - d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{s})$$

kaikilla $\overline{s} \in S$, joten infimumista seuraa, että

$$f(\overline{y}) - d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, S) = f(\overline{x}) \iff f(\overline{y}) - f(\overline{x}) \leq d(\overline{x}, \overline{y}).$$

Näistä saadaan, että

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \leq d(\overline{x}, \overline{y})$$

eli f on (tasaisesti) jatkuva. Osoitetaan sitten[2], että

$$S = f^{-1}(0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\overline{x}) = 0\}.$$

Olkoon siis $\overline{s} \in S$, jolloin infimumin määritelmän ja etäisyysfunktion ominaisuuksien perusteella

$$0 \leq d(\overline{s}, S) \leq d(\overline{s}, \overline{s}) = 0$$

eli $\overline{s} \in f^{-1}(0)$, joten $S \subset f^{-1}(0)$. Olkoon sitten $\overline{x} \in f^{-1}(0)$ ja $r > 0$. Tällöin $d(\overline{x}, S) = 0$, joten on olemassa $\overline{y} \in S$ siten, että $d(\overline{x}, \overline{y}) < r$. Erityisesti $\overline{y} \in B(\overline{x}, r)$ eli $B(\overline{x}, r) \cap S \neq \emptyset$. Tällöin $\overline{x} \in \overline{S}$ ja koska S on suljettu, niin $S = \overline{S}$ eli $\overline{x} \in S$. Siispä $f^{-1}(0) \subset S$.

Yhdistämällä nämä saadaan, että $S = f^{-1}(0)$, kuten haluttiinkin.

[1] Osoitettu MATA255 H5T3.
[2] Osoitettu MATA255 H4T4.

Tehtävä 2

Merkitään avaruuden $\mathbb{R}^{n+k}$ vektoreita $(\overline{x},\overline{y})$, missä $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Olkoot $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ja $F\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ differentioituvia kuvauksia, joille $\det D_{\overline{y}}F(\overline{x},\overline{y}) \neq 0$ kaikilla $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+k}$ ja

$$F(\overline{x}, G(\overline{x})) = \overline{0} \text{ kaikilla } \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Osoita, että

$$DG(\overline{x}) = -[D_{\overline{y}}F(\overline{x},\overline{y})]^{-1} D_{\overline{x}}F(\overline{x},\overline{y}).$$

Ratkaisu:

Olkoon $\overline{y} = G(\overline{x})$ ja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ siten, että

$$h(\overline{x}) = (\overline{x}, G(\overline{x})).$$

Tällöin $F(\overline{x},\overline{y}) = F(h(\overline{x})) = \overline{0}$, jolloin ketjusäännön nojalla F on differentioituva siten, että

$$D(F \circ h)(\overline{x}) = DF(h(\overline{x}))Dh(\overline{x}).$$

Nyt $DF(h(\overline{x})) = \begin{bmatrix} D_{\overline{x}}F(h(\overline{x})) & D_{\overline{y}}F(h(\overline{x})) \end{bmatrix}$ ja

$$Dh(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\overline{x})^T \\ \nabla h_2(\overline{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_n(\overline{x})^T \\ \nabla h_{n+1}(\overline{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_{n+k}(\overline{x})^T \end{bmatrix}.$$

Koska $h_i(\overline{x}) = x_i$ kaikilla $1 \leq i \leq n$, pätee $\nabla h_i(\overline{x}) = \overline{e}_i$. Kun taas $n+1 \leq i \leq n+k$, niin $\nabla h_i(\overline{x}) = \nabla G_{n-i}(\overline{x})$. Siispä

$$Dh(\overline{x}) = \begin{bmatrix} I_k \\ DG(\overline{x}) \end{bmatrix}.$$

Näin ollen

$$D(F \circ h)(\overline{x}) = \begin{bmatrix} D_{\overline{x}}F(h(\overline{x})) & D_{\overline{y}}F(h(\overline{x})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ DG(\overline{x}) \end{bmatrix} = D_{\overline{x}}F(h(\overline{x})) + D_{\overline{y}}F(h(\overline{x}))DG(\overline{x}) = 0_{k \times k},$$

joten oletuksen $\det F(h(\overline{x})) = \det F(\overline{x},\overline{y}) \neq 0$ ja matriisien laskusääntöjen nojalla

$$DG(\overline{x}) = -[D_{\overline{y}}F(h(\overline{x}))]^{-1} D_{\overline{x}}F(h(\overline{x})) = [D_{\overline{y}}F(\overline{x},\overline{y})]^{-1} D_{\overline{x}}F(\overline{x},\overline{y})$$

ja saatiin väite.

Tehtävä 3

Tarkastellaan yhtälön

$$e^{x^2y} + y^2z^3 + z - 4xy^3 - x = 1$$

ratkaisujoukkoa. Tutki implisiittifunktiolauseen avulla voidaanko tämän yhtälön esittää muodossa $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$ tai $z = h(x,y)$ pisteen $(0,0,0)$ lähellä ja määrää positiivisissa tapauksissa gradientit (siis ∇f, ∇g tai ∇h) pisteessä $(0,0)$.

Ratkaisu:

Todetaan aluksi, että $F(0,0,0) = 0$ ja $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Lisäksi

$$\nabla F(x,y,z) = \left(2xye^{x^2y} - 4y^3 - 1, x^2e^{x^2y} + 2yz^3 - 12xy^2, 3y^2z^2 + 1\right),$$

joten

$$\nabla F(0,0,0) = (-1,0,1).$$

Tällöin implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa pisteen $(0,0,0)$ ympäristöt siten, että $x = f(y,z)$ tai $z = h(x,y)$, missä f ja h ovat jatkkuvasti differentioituvia. Lisäksi implisiittifunktiolauseesta saadaan, että

$$\begin{aligned} Df(0,0) = \nabla f(0,0) &= -[D_{(y,z)}F(f(0,0),0,0)]^{-1}D_xF(f(0,0),0,0) \\ &= -\frac{(\partial_y F(0,0,0), \partial_z F(0,0,0))}{\partial_x F(0,0,0)} = -\frac{(0,1)}{-1} = (0,1) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Dh(0,0) = \nabla h(0,0) &= -[D_{(x,y)}F(0,0,h(0,0))]^{-1}D_xF(0,0,h(0,0)) \\ &= -\frac{(\partial_x F(0,0,0), \partial_y F(0,0,0))}{\partial_z F(0,0,0)} = -\frac{(-1,0)}{-1} = (1,0). \end{aligned}$$

Tehtävä 4

Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases}(x_1x_2)^4 + (x_1+x_3)^3 + x_4 = 0\\ \sin(x_1x_2)^4 + e^{x_2+x_4^2} - 1 = 0.\end{cases}$$

Osoita, että tämän yhtälöparin ratkaisut pisteen $(0,0,0,0)$ lähellä voidaan esittää muodossa $(x_2,x_4) = G(x_1,x_3)$, missä G on jatkuvasti differentioituva. Määrää myös $DG(0,0)$.

Ratkaisu:

Olkoon $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Big((x_1x_2)^4 + (x_1+x_3)^3 + x_4, \sin(x_1x_2)^4 + e^{x_2+x_4^2} - 1\Big),$$

jolloin yhtälöryhmä toteutuu jos ja vain jos $F(\overline{x}) = \overline{0}$. Lisäksi $F(0,0,0,0) = (0,0)$ ja

$$DF(0,0,0,0) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

joten

$$\det D_{(x_2,x_4)}F(0,0,0,0) = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Nyt implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa jatkuvasti differentioituva G siten, että $(x_2,x_4) = G(x_1,x_3)$ jossakin pisteen $(0,0,0,0)$ avoimessa ympäristössä. Lisäksi

$$DG(0,0) = -[D_{(x_2,x_4)}F(0,0,0,0)]^{-1}\underbrace{D_{(x_1,x_3)}F(0,0,0,0)}_{=0_{2\times 2}} = 0_{2\times 2}.$$

Tehtävä 5

Oletetaan, että $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva, $\nabla F \not\equiv \overline{0}$ ja $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Oletetaan lisäksi, että yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrää pallossa $B^3((x_0, y_0, z_0), r)$ jokaisen muuttujista kahden muun funktiona. Osoita, että pallossa $B^3((x_0, y_0, z_0), r)$ pätee

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \equiv -1.$$

Ratkaisu:

Koska ∇F on identtisesti nollasta poikkeava, implisiittifunktiolauseen oletukset täyttyvät, jolloin on olemassa sellainen avoin $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, että $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ ja jossa jokaisen muuttujan voi kirjoittaa kahden muun funktiona. Erityisesti on $r > 0$ siten, että $B^3((x_0, y_0, z_0), r) \subset \Omega$ jossa sama pätee. Implisiittifunktiolause antaa nyt, kun oletetaan $x = x(y, z)$, että

$$Dx(y,z) = \nabla x(y,z) = -[D_{(y,z)}F(x,y,z)]^{-1} D_x F(x,y,z) = -\frac{(\partial_y F(x,y,z), \partial_z F(x,y,z))}{\partial_x F(x,y,z)}$$

kaikilla $(x, y, z) \in B^3$. Vastaavasti muille muuttujille saadaan

$$\nabla y(x,z) = -\frac{(\partial_x F(x,y,z), \partial_z F(x,y,z))}{\partial_y F(x,y,z)} \quad \text{ja} \quad \nabla z(x,y) = -\frac{(\partial_x F(x,y,z), \partial_y F(x,y,z))}{\partial_z F(x,y,z)}$$

kaikilla $(x, y, z) \in B^3$. Nämä yhdistämällä saadaan

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\partial_y F(x,y,z)}{\partial_x F(x,y,z)}\right)\left(-\frac{\partial_z F(x,y,z)}{\partial_y F(x,y,z)}\right)\left(-\frac{\partial_x F(x,y,z)}{\partial_z F(x,y,z)}\right) = -1$$

kaikilla $(x, y, z) \in B^3$. Siispä pallossa pätee

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \equiv -1$$

ja saatiin väite.

Tehtävä 6

Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin joukko, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ ja $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $f(x_0, y_0, z_0) = 0 = g(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \overline{0}$. Osoita, että yhtälöpari

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

määrää kaksi muuttujista x, y ja z kolmannen avulla pisteen (x_0, y_0, z_0) lähellä.

Ratkaisu:

Olkoon $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)),$$

jolloin yhtälöryhmä toteutuu jos ja vain jos $F(x, y, z) = \overline{0}$. Lisäksi

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y, z) & \partial_y f(x, y, z) & \partial_z f(x, y, z) \\ \partial_x g(x, y, z) & \partial_y g(x, y, z) & \partial_z g(x, y, z) \end{bmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned}
\det D_{(y,z)} F(x_0, y_0, z_0) &= \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \partial_z g(x_0, y_0, z_0) - \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \partial_y g(x_0, y_0, z_0), \\
\det D_{(x,z)} F(x_0, y_0, z_0) &= \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \partial_z g(x_0, y_0, z_0) - \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \partial_x g(x_0, y_0, z_0), \\
\det D_{(x,y)} F(x_0, y_0, z_0) &= \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \partial_y g(x_0, y_0, z_0) - \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \partial_x g(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g(x_0, y_0, z_0) &= (\partial_y f(x_0, y_0, z_0) \partial_z g(x_0, y_0, z_0) - \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \partial_y g(x_0, y_0, z_0)) \hat{\imath} \\
&\quad - (\partial_x f(x_0, y_0, z_0) \partial_z g(x_0, y_0, z_0) - \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \partial_x g(x_0, y_0, z_0)) \hat{\jmath} \\
&\quad + (\partial_x f(x_0, y_0, z_0) \partial_y g(x_0, y_0, z_0) - \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \partial_x g(x_0, y_0, z_0)) \hat{k} \\
&= \big(\det D_{(y,z)} F(x_0, y_0, z_0), -\det D_{(x,z)} F(x_0, y_0, z_0), \det D_{(x,y)} F(x_0, y_0, z_0)\big) \\
&\neq \overline{0}
\end{aligned}$$

eli ainakin yksi determinanteista on nollasta poikkeava. Tällöin implisiittifunktiolauseen mukaan ainakin yksi muuttujista voidaan kirjoittaa kahden muun funktiona jossakin pisteen (x_0, y_0, z_0) avoimessa ympäristössä.

Tehtävä 7

Olkoot $F\colon\,]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva funktio, jolle $F(0,0)=0$. Oletetaan lisäksi, että yhtälön $F(x,y)=0$ ratkaisujoukko sisältää jatkuvasti differentioituvien funktioiden $g,h\colon\,]-1,1| \to \mathbb{R}$ graafit ja, että $g(0)=h(0)=0$, $g'(0)=1$ ja $h'(0)=-1$.

(a) Osoita implisiittifunktiolauseen avulla, että $\nabla F(0,0)=(0,0)$.

(b) Kuten (a)-kohta mutta käyttämättä implisiittifunktiolausetta.

Ratkaisu:

(a) Merkitään $\mathcal{F}=\{(x,y)\in\,]-1,1[^2 : F(x,y)=0\}$, $\mathcal{G}_g=\{(x,g(x)) : x\in\,]-1,1[\}$ ja $\mathcal{G}_h=\{(x,h(x)) : x\in\,]-1,1[\}$, jolloin oletuksen mukaan $\mathcal{G}_g,\mathcal{G}_h\subset\mathcal{F}$. Lisäksi g ja h ovat jatkuvasti differentioituvia, joten on olemassa välit $I_g,I_h\subset\,]-1,1[$ siten, että näillä väleillä $\mathcal{G}_g|I_g=\mathcal{F}|I_g^2$ ja $\mathcal{G}_h|I_h=\mathcal{F}|I_h^2$, missä $\mathcal{F}|I$ tarkoittaa tasa-arvojoukon rajoittumaa joukkoon I. Lisäksi $g(0)=h(0)=0$, jolloin sama pätee epätyhjässä joukossa $I=I_g\cap I_h$. Tässä vaiheessa on siis vasta sanottu, että yhtälön $F(x,y)=0$ ratkaisujoukko voidaan esittää jollakin epätyhjällä välillä I funktioiden g ja h graafeina, missä erityisesti $0\in I$. Tällä välillä I pätee siten, että

$$F(x,y)=0 \iff (x,y)\in\mathcal{G}_g \iff (x,y)\in\mathcal{G}_h.$$

Tehdään sitten vastaoletus, että $\nabla F(0,0)\neq\overline{0}$ eli jollakin $i\in\{1,2\}$ pätee $\partial_i F(0,0)\neq 0$. Merkitään toista koordinaattia $j\in\{1,2\}$, $i\neq j$. Käyttämällä implisiittifunktiolausetta muuttujan x_i suhteen, saadaan, että jossakin avoimessa joukossa $U\subset I$ pätee joko $F(x_j,f(x_j))=0$ tai $F(f(x_j),x_j)=0$. Implisiittifunktiolause takaa, että f on yksikäsitteinen. Kuitenkin samalla välillä U pätee myös $F(x,g(x))=0=F(x,h(x))$. Lisäksi $g\neq h$, sillä $g'(0)\neq h'(0)$ eli f ei voikaan olla yksikäsitteinen. Tämä on ristiriita, joten $\nabla F(0,0)=(0,0)$ ja saatiin väite[3].

(b) Olkoon $\hat{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\hat{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Koska tasa-arvokäyrällä $F(x,y)=0$ kuvauksen F arvo ei (määritelmän mukaan) muutu, täytyy olla

$$D_{\hat{u}}F(0,0)=0=D_{\hat{v}}F(0,0),$$

sillä oletuksen $g'(0)=1$, $h'(0)=-1$ nojalla käyrällä $F(x,y)=0$ on origossa suuntaisderivaatat molempiin suuntiin. Toisaalta

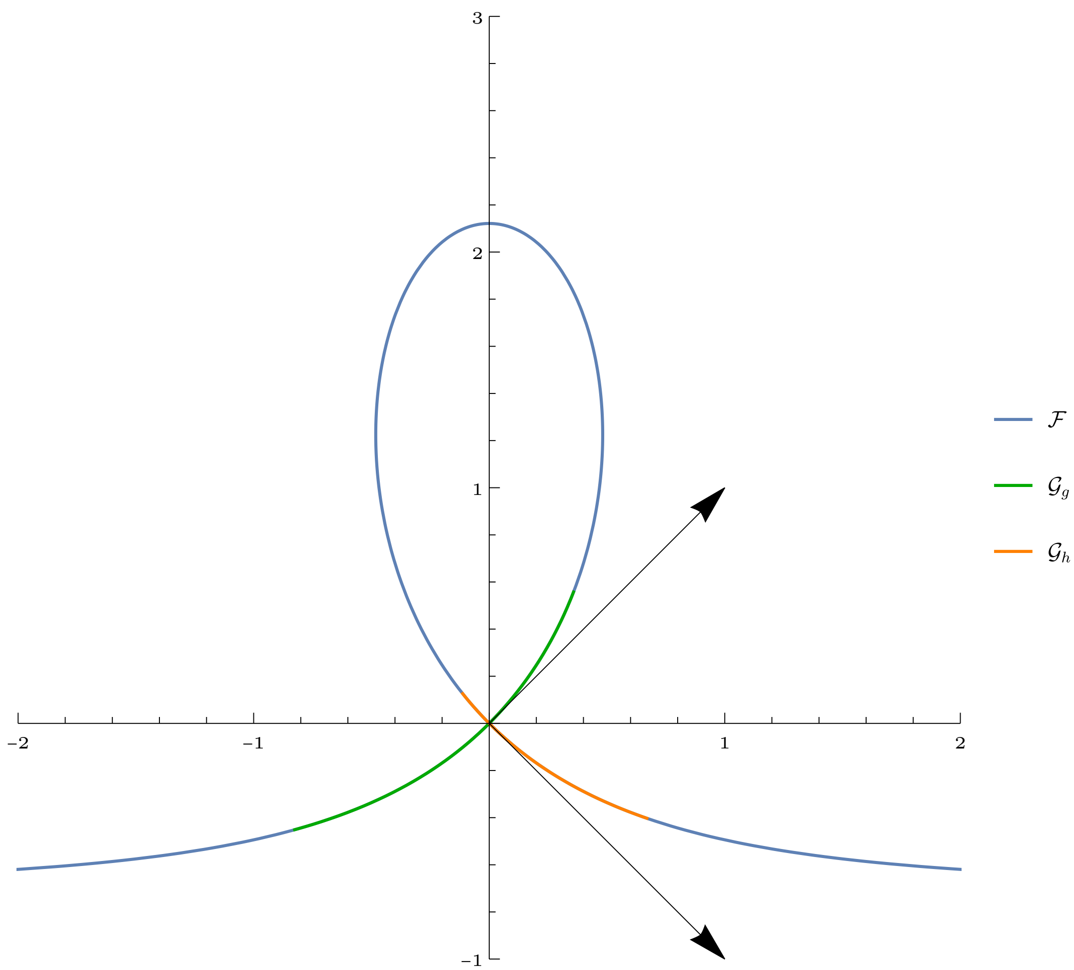
$$D_{\hat{u}}F(0,0)=\nabla F(0,0)\cdot\hat{u}=\partial_1F(0,0)u_1+\partial_2F(0,0)u_2=0$$

ja vastaavasti

$$D_{\hat{v}}F(0,0)=\nabla F(0,0)\cdot\hat{v}=\partial_1F(0,0)v_1+\partial_2F(0,0)v_2=0.$$

Ratkaisemalla saatu yhtälöpari nähdään, että täytyy olla $\partial_1F(0,0)=\partial_2F(0,0)=0$ eli $\nabla F(0,0)=(0,0)$, kuten haluttiinkin.

[3]Seuraavalla sivulla vielä kuva tästä sekasotkusta.



Kuva 1: Tässä vielä havainnollistus edellisestä. Ideana siis, että oletukset pakottavat tasa-arvojoukon $\mathcal{F}$ leikkaamaan itsensä origossa, jolloin sen päälle saadaan kaksi graafia $\mathcal{G}_g$ ja $\mathcal{G}_h$, joita implisiittifunktiolauseen nojalla pitäisi olla tasan yksi, mikäli $\nabla F(0,0) \neq \overline{0}$. Toisaalta leikkauspisteessä käyrälle saadaan derivaatta kahteen lineaarisesti riippumattomaan suuntaan (mustat vektorit), mikä pakottaa gradientin nollaksi.