# Tehtävä 1

Osoita, että yhtälöt

$$x_1x_2x_3 = 6 \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 8$$

määrittelevät avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sileän ?-ulotteisen pinnan pisteen $(3,2,1)$ ympäristössä. Määritä edelleen tangentti- ja normaaliavaruudet sekä niiden dimensiot.

**Ratkaisu:**

Olkoon $\overline{x}_0 = (3,2,1)$, $K = ]2,4[ \times ]1,3[ \times ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[ \subset \mathbb{R}^3$ sekä $F\colon K \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2x_3 - 6, x_1 + x_2^2 + x_3^3 - 8),$$

jolloin yhtälöryhmä toteutuu jos ja vain jos $F(\overline{x}) = \overline{0}$. Lisäksi $\overline{x}_0 \in F^{-1}(\overline{0})$ ja

$$DF(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_2x_3 & x_1x_2 & x_1x_2 \\ 1 & 2x_2 & 3x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että kun $\overline{x} \in K$, niin

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 \\ 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 2x_2^2x_3 - x_1x_3 = x_3(2x_2^2 - x_1) \geq \frac{1}{2}(2 \cdot 2^2 - 4) = 2 > 0.$$

Siispä matriisissa $DF(\overline{x})$ on kaikilla $\overline{x} \in K$ ainakin kaksi lineaarisesti riippumatonta saraketta. Toisaalta

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & x_1x_2 \\ 1 & 3x_3^2 \end{vmatrix} = 3x_2x_3^3 - x_1x_2,$$

joten pisteessä $\overline{x}_0$ determinantiksi tulee $3 \cdot 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 2 = 0$ eli matriisissa $DF(\overline{x})$ on joukossa $K$ tasan kaksi lineaarisesti riippumatonta saraketta. Tällöin Lauseen 7.8 nojalla $F^{-1}(\overline{0})$ on sileä 1-ulotteinen pinta. Lisäksi

$$T_{\overline{x}_0} = \ker DF(\overline{x}_0) \quad \text{ja} \quad N_{\overline{x}_0} = \langle \nabla F_1(\overline{x}_0), \nabla F_2(\overline{x}_0) \rangle.$$

Derivaattamatriisin ytimen selvittämistä varten ratkaistaan yhtälöryhmä

$$DF(\overline{x}_0)\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[ \end{cases},$$

joten tangenttiavaruudeksi saadaan

$$T_{\overline{x}_0} = \langle (-3,0,1) \rangle.$$

Erityisesti $\dim T_{\overline{x}_0} = 1$. Normaaliavaruudeksi tulee gradienttien avulla suoraviivaisesti

$$N_{\overline{x}_0} = \langle (2,3,6), (1,4,3) \rangle,$$

jolloin $\dim N_{\overline{x}_0} = 2$.

## Tehtävä 2

Olkoot $a, b, c > 0$ ja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

(a) Osoita, että $S$ on sileä ja kompakti 2-ulotteinen pinta.

(b) Minkä kokoinen on tilavuudeltaan pienin tahokas, jonka rajaavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sekä tangenttitaso ellipsoidille

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Ratkaisu:**

(a) Olkoon $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

jolloin $S = F^{-1}(0)$. Nyt

$$DF(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) = \overline{0} \iff (x,y,z) = \overline{0}.$$

Koska $\overline{0} \notin S$, seuraa Lauseesta 7.8, että $S$ on sileä 2-ulotteinen pinta. Lisäksi $S \subset B(\overline{0}, \max\{a,b,c\})$, joten $S$ on rajoitettu. Toisaalta $F$ on jatkuva ja $\{0\}$ on suljettu, joten $S$ on myös suljettu ja siten kompakti.

(b) (a)-kohdan ja Lauseen 7.8 mukaan tangenttiavaruus on

$$T_{\overline{x}} = \ker DF(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^3 : \overline{y} \cdot \nabla F(\overline{x}) = 0\} = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^3 : \overline{y} \cdot \overline{x} = 0\} = \langle \overline{x} \rangle^{\perp}$$

ja tangenttitaso on $\mathcal{T}_{\overline{x}} = \overline{x} + T_{\overline{x}}$.

Olkoon sitten $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, $\overline{n} = (x_0/a^2, y_0/b^2, z_0/c^2) \in N_{\overline{r}_0}$ ja $\overline{r} = (x,y,z) \in \mathcal{T}_{\overline{r}_0}$. Tällöin $\overline{n} \cdot (\overline{x} - \overline{r}_0) = 0$ eli

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

josta rajoitteen $F$ avulla seuraa, että

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Asettemalla vuoroittain kaksi koordinaattia $x, y, z$ nollaksi ja ratkaisemalla jäljelle jäänyt saadaan, että leikkauspisteet ovat tangenttitason ja koordinaattiakselien kanssa on

$$\left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right), \left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0\right), \left(0, 0, \frac{c^2}{z_0}\right).$$

Näin ollen tahokas voidaan kirjoittaa vektoreiden

$$\overline{\alpha} = \frac{a^2}{x_0}\hat{x}, \quad \overline{\beta} = \frac{b^2}{y_0}\hat{y} \quad \text{ja} \quad \overline{\gamma} = \frac{c^2}{z_0}\hat{z}$$

avulla, jolloin käyttäen tunnettua tilavuuden kaavaa saadaan

$$V = \frac{1}{6}(\overline{\alpha} \cdot (\overline{\beta} \times \overline{\gamma})) = \frac{1}{6}\frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Määritellään siis $V \colon S \to \mathbb{R}$,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{6}\frac{(abc)^2}{xyz}.$$

Tilavuus $V$ minimoituu, kun tulo $xyz$ minimoituu. Olkoon siis $\psi \colon S \to \mathbb{R}$, $\psi(x, y, z) = xyz$.

Nyt $\nabla\psi(x, y, z) = (yz, xz, xy) \neq \overline{0}$ ainakin silloin, kun $x, y, z \neq 0$. Jos nimittäin joku koordinaatti $x, y, z$ olisi nolla, tällöin $\psi(x, y, z) = 0$ ja tilavuus $V$ ei olisi hyvin määritelty[1]. Siispä joukossa $\operatorname{int} S$ ei ole ääriarvopisteitä.

Kuitenkin $\psi$ on jatkuva ja $S$ on (a)-kohdan nojalla kompakti, joten on olemassa[2] $\overline{s}_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \partial S$, jolla $\psi$ saavuttaa maksimiarvonsa. Lisäksi $\nabla\psi(\overline{s}_0) \neq \overline{0}$, joten Lauseen 8.2 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $\lambda \in \mathbb{R}$, jolle $\nabla\psi(\overline{s}_0) = \lambda\nabla F(\overline{s}_0)$ eli

$$(v_0 w_0, u_0 w_0, u_0 v_0) = 2\lambda\left(\frac{u_0}{a^2}, \frac{v_0}{b^2}, \frac{w_0}{c^2}\right).$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{v_0 w_0}{u_0}a^2 = \frac{u_0 w_0}{v_0}b^2 = \frac{u_0 v_0}{w_0}c^2,$$

joten yhdessä rajoitteen $F$ kanssa

$$\frac{u_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{b^2} = \frac{w_0^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

Tästä puolestaan saadaan, että

$$\left(\frac{u_0 v_0 w_0}{abc}\right)^2 = \frac{1}{3^3}.$$

[1]Tämä vastaisi tilannetta, jossa ollaan ellipsoidin reunalla ja tangenttitaso menee pystysuoraksi.
[2]Tässähän alkaa loppua järkevät kirjaimet...

Sijoittamalla tämä tilavuuden lausekkeeseen $V$ saadaan sieventämällä

$$V(u_0, v_0, w_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

Kysytty pienimmän tahokkaan tilavuus on siis $V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

## Tehtävä 3

Määrää tasokäyrän $(x-1)^3 = y^2$ pisteistä se, joka on lähimpänä origoa ts. määrää funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ minimi rajoitteella $g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$. Osoita lisäksi, että ei ole olemassa sellaista $\lambda \in \mathbb{R}$, jolle

$$\nabla f(1,0) = \lambda \nabla g(1,0).$$

**Ratkaisu:**

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \|(x,y)\|^2 = x^2+y^2$. Rajoitteesta $(x-1)^3 = y^2$ saadaan, että

$$f(x,y) = x^2+y^2 = x^2+(x-1)^3.$$

Esimerkiksi kuvasta nähdään, että piste $(1,0)$ voisi olla haettu minimi. Osoitetaan tämä. Ensinnäkin

$$g(1,0) = 0 \quad \text{ja} \quad f(1,0) = 1.$$

Tarkastellaan nyt poikkeutusta $\overline{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$f(1+h_1, 0+h_2) - f(1,0) = (1+h_1)^2 + h_1^3 - 1 = h_1(h_1^2+h_1+2).$$

Jos $x < 1$, niin $(x-1)^3 < 0$, mutta tällöin $y^2 < 0$, mikä ei ole mahdollista reaaliluvuilla. Siispä täytyy olla $x \geq 1$, erityisesti $h_1 \geq 0$. Tällöin

$$f(1+h_1, 0+h_2) - f(1,0) = h_1(h_1^2+h_1+2) \geq 0,$$

eli liikuttaessa pois päin pisteestä $(1,0)$ kuvaus $f$ saa suurempia arvoja. Siispä täytyy olla, että $(1,0)$ on minimi, kuten haluttiinkin.

Tarkastellaan sitten gradientteja tässä pisteessä. Nyt

$$\nabla f(1,0) = (2x, 2y)_{(x,y)=(1,0)} = (2,0)$$

ja

$$\nabla g(1,0) = (3(x-1)^2, -2y)_{(x,y)=(1,0)} = \overline{0}.$$

Siispä kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

$$\nabla f(1,0) = (2,0) \neq (0,0) = \lambda \nabla g(1,0).$$

## Tehtävä 4

Osoita, että jokaisella symmetrisellä matriisilla $A$ on reaalinen ominaisarvo tutkimalla funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\overline{x}) = \langle \overline{x}, A\overline{x}\rangle$ käyttäytymistä pallopinnalla $\|\overline{x}\| = 1$.

**Ratkaisu:**

Olkoon $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\overline{x}) = \|\overline{x}\|^2 - 1 = \langle \overline{x}, \overline{x}\rangle - 1$, jolloin $\mathbb{S} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{x}\| = 1\} = g^{-1}(0)$. Selvästi $\mathbb{S}$ on rajoitettu. Lisäksi $\mathbb{S}$ on suljettu, sillä $g$ on jatkuva kuvaus ja $\{0\}$ on suljettu joukko. Siispä $\mathbb{S}$ on kompakti, jolloin kuvaus $f$ saavuttaa joukossa $\mathbb{S}$ pienimmän arvonsa. Lasketaan sitten $\nabla f(\overline{x})$. Olkoon $1 \leq i \leq n$ ja $h \neq 0$, jolloin sisätulon lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}) &= \langle \overline{x} + h\overline{e}_i, A(\overline{x} + h\overline{e}_i)\rangle - \langle \overline{x}, A\overline{x}\rangle \\ &= \langle \overline{x}, A\overline{x}\rangle + h\langle \overline{x}, A\overline{e}_i\rangle + h\langle \overline{e}_i, A\overline{x}\rangle + h^2\langle \overline{e}_i, A\overline{e}_i\rangle - \langle \overline{x}, A\overline{x}\rangle \\ &= h\langle \overline{x}, A\overline{e}_i\rangle + h\langle \overline{e}_i, A\overline{x}\rangle + h^2\langle \overline{e}_i, A\overline{e}_i\rangle. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\partial_i f(\overline{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x})}{h} = \langle \overline{x}, A\overline{e}_i\rangle + \langle \overline{e}_i, A\overline{x}\rangle.$$

Nyt sisätulon ominaisuuksilla

$$\langle \overline{x}, A\overline{e}_i\rangle = \overline{x}^T A\overline{e}_i = (A^T\overline{x})^T\overline{e}_i.$$

$A$ on symmetrinen eli $A^T = A$, joten

$$(A^T\overline{x})^T\overline{e}_i = (A\overline{x})^T\overline{e}_i = \langle \overline{e}_i, A\overline{x}\rangle.$$

Siispä

$$\partial_i f(\overline{x}) = 2\langle \overline{e}_i, A\overline{x}\rangle$$

ja siten

$$\nabla f(\overline{x}) = 2A\overline{x}.$$

Toisaalta $g(\overline{x}) = \langle \overline{x}, \overline{x}\rangle - 1 = \langle \overline{x}, I_n\overline{x}\rangle - 1$, joten edellistä tulosta hyödyntäen

$$\nabla g(\overline{x}) = 2I_n\overline{x} = 2\overline{x}.$$

Erityisesti $\nabla g(\overline{x}) = \overline{0} \iff \overline{x} = \overline{0}$, joten koska $\overline{0} \notin \mathbb{S}$, niin $\nabla g(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$. Lause 8.2 antaa nyt yksikäsitteisen kertoimen $\lambda \in \mathbb{R}$, jolle

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \lambda \nabla g(\overline{x}_0).$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön aiemmin lasketut gradientit saadaan

$$2A\overline{x}_0 = 2\lambda\overline{x}_0 \iff A\overline{x}_0 = \lambda\overline{x}_0.$$

Löydettiin siis reaalinen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$ matriisille $A$ ja väite on siten osoitettu.

## Tehtävä 5

Olkoot $a, b, c > 0$. Etsi funktion $f\colon \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ suurin arvo ehdolla $x + y + z = 1$. Osoita tämän avulla, että kaikille $u, v, w > 0$ pätee

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

**Ratkaisu:**

Olkoon $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$ ja $g\colon K \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. Merkitään $S = g^{-1}(0)$. Selvästi $S$ on suljettu, sillä $g$ on jatkuva ja $\{0\}$ suljettu. Lisäksi kaikilla $(x, y, z) \in S$ pätee

$$\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + yz = (x + y + z)^2 = 1,$$

joten $S$ on rajoitettu ja siten kompakti. Siispä $f$ saavuttaa joukossa $S$ maksimipisteen $\overline{r}_0 \in S$. Koska

$$\nabla f(\overline{x}) = (ax^{a-}y^b z^c, bx^a y^{b-1} z^c, cx^a y^b z^{c-1}) \neq \overline{0}$$

kaikilla $x, y, z \neq 0$. Jos joku koordinaateista $x, y, z$ olisi nolla, niin tällöin $f(x, y, z) = 0$, eli kyseinen piste ei voi olla maksimipiste. Siispä maksimi saavutetaan reunalla $\partial S$. Lisäksi $\nabla g(\overline{r}_0) = (1, 1, 1) \neq \overline{0}$, joten Lause 8.2 antaa nyt yksikäsitteisen vakion $\lambda \in \mathbb{R}$, jolle $\nabla f(\overline{r}_0) = \lambda \nabla g(\overline{r}_0)$. Tästä saadaan, että

$$\nabla f(\overline{r}_0) = (ax_0^{a-1} y_0^b z_0^c, bx_0^a y_0^{b-1} z_0^c, cx_0^a y_0^b z_0^c) = \lambda(1, 1, 1),$$

jolloin

$$ay_0 z_0 = bx_0 z_0 = cx_0 y_0.$$

Käyttämällä ehtoa $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ saadaan

$$x_0 + \frac{b}{a} x_0 + \frac{c}{a} x_0 = 1 \iff x_0 = \frac{a}{a+b+c}.$$

Näin ollen

$$y_0 = \frac{b}{a} x_0 = \frac{b}{a+b+c} \quad \text{ja} \quad z_0 = \frac{c}{a} x_0 = \frac{c}{a+b+c}.$$

Siispä maksimiarvo on

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

Olkoon sitten $u, v, w > 0$. Tällöin on olemassa $\alpha, \beta, \gamma > 0$ siten, että

$$\alpha a = \beta b = \gamma c = u + v + w,$$

jolloin

$$\frac{u}{\alpha a} + \frac{v}{\beta b} + \frac{w}{\gamma c} = 1.$$

Siispä edellisten tulosten perusteella

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{u}{\alpha a}, \frac{v}{\beta b}, \frac{w}{\gamma c}\right) &= \left(\frac{u}{\alpha a}\right)^a \left(\frac{v}{\beta b}\right)^b \left(\frac{w}{\gamma c}\right)^c \\
&= \frac{1}{\alpha^a \beta^b \gamma c} \left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \\
&\leq \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} \\
&= \frac{1}{\alpha^a \beta^b \gamma^c} \frac{(\alpha a)^a (\beta b)^b (\gamma c)^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} \\
&= \frac{1}{\alpha^a \beta^b \gamma^c} \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c},
\end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää väitteen kanssa supistamalla tekijä $1/(\alpha^a \beta^b \gamma^c)$ pois.

## Tehtävä 6

Olkoot $s > 0$ ja

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq s, x + y \geq z, y + z \geq x, z + x \geq y\}.$$

Olkoon $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z)$. Osoita, että ehdolla $x + y + z = 2s$ funktio $f$ saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $(2s/3, 2s/3, 2s/3)$. Osoita tämän avulla, että kolmioista, joiden kehäpituus on $2s$, pinta-alaltaan suurin on tasasivuinen kolmio.

**Ratkaisu:**

Olkoon $g\colon E \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x + y + z - 2s$ ja $\overline{x} \in E$, jolloin

$$\|\overline{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3s^2$$

eli $E$ on rajoitettu. Olkoon sitten $S = g^{-1}(0)$, jolloin $S \subset E$. Koska $g$ on jatkuva ja $\{0\}$ suljettu, niin myös $S$ ja suljettu ja siten myös kompakti. Tällöin $f$ saavuttaa joukossa $S$ suurimman arvonsa jossakin pisteessä $\overline{x}_0 \in S$. Koska

$$\nabla f(\overline{x}) = -s((s - y_0)(s - z_0), (s - x_0)(s - z_0), (s - x_0)(s - y_0)) = \overline{0}$$

jos ja vain jos $x_0 = z_0 = s$, niin $\overline{x}_0 \notin \operatorname{int} S$. Toisaalta

$$\nabla g(\overline{x}_0) = (1, 1, 1) \neq \overline{0},$$

joten Lauseen 8.2 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että $\nabla f(\overline{x}_0) = \lambda \nabla g(\overline{x}_0)$. Tästä saadaan, että

$$\begin{cases} (s - y_0)(s - z_0) = \lambda \\ (s - x_0)(s - z_0) = \lambda \\ (s - x_0)(s - y_0) = \lambda \end{cases} \iff x_0 = y_0 = z_0.$$

Ehto $x + y + z = 2s$ antaa nyt, että $x_0 = y_0 = z_0 = 2s/3$.

Olkoon sitten $K$ kolmio, jonka sivujen pituudet ovat $a, b, c > 0$. Kun asetetaan $s = (a + b + c)/2$, niin kolmion kehäpituus on $a + b + c = 2s$. Heronin kaavan avulla kolmion pinta-alalle $A$ pätee

$$A^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) = f(a, b, c).$$

Tällöin $A$ maksimoituu edellisten tulosten perusteella silloin, kun $a = b = c = 2s/3$ eli kun $K$ on tasasivuinen.

## Tehtävä 7

Olkoot $R = \{\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$. Osoita aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ (x_i \geq 0 \ \forall i)$$

tutkimalla funktion $f\colon R \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$ käyttäytymistä joukossa $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n = 1$ tai tutkimalla funktion $f\colon R \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ käyttäytymistä joukossa $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

**Ratkaisu:**

Olkoon $f\colon R \to \mathbb{R}$, $f(\overline{x}) = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ ja $g\colon R \to \mathbb{R}$, $g(\overline{x}) = x_1 \cdots x_n - 1$. Selvästi $K = g^{-1}(0)$ on rajoitettu (jos $\overline{x} \in K$ voisi kasvaa rajatta, niin $g(\overline{x}) > 0$) sekä suljettu, sillä $g$ on jatkuva ja $\{0\}$ suljettu. Siispä $K \subset R$ on kompakti ja siten kuvaus $f$ saavuttaa tässä joukossa pienimmän arvonsa jossakin pisteessä $\overline{y} \in K$. Nyt $\overline{y} \notin \operatorname{int} K$, sillä

$$\nabla f(\overline{x}) = \frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1) \neq \overline{0}.$$

Siispä minimi saavutetaan reunalla $\partial K$. Koska

$$\nabla g(\overline{y}) = (y_2 \cdots y_n, y_1 y_3 \cdots y_n, \dots, y_1 \cdots y_{n-1}) = \overline{0} \iff y_i = 0 \quad \text{jollakin} \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

niin oletuksen $y_i > 0$ kaikilla $1 \leq i \leq n$ ja Lauseen 8.2 avulla on olemassa yksikäsitteinen $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että $\nabla f(\overline{y}) = \lambda \nabla g(\overline{y})$. Tästä saadaan, että

$$\frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1) = \lambda(y_2 \cdots y_n, y_1 y_3 \cdots y_n, \dots, y_1 \cdots y_{n-1}),$$

mikä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1.$$

Osoitetaan sitten aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. Olkoot $z_1, z_2, \dots, z_n \geq 0$. Jos $z_i = 0$ jollakin $1 \leq i \leq n$, niin tällöin väite pätee triviaalisti. Oletetaan siis, että $z_i > 0$ kaikilla $i$. Nyt on olemassa $\mu > 0$ siten, että

$$(\mu z_1)(\mu z_1) \cdots (\mu z_n) = \mu^n z_1 z_2 \cdots z_n = 1.$$

Edellisten tulosten perusteella

$$f(\mu \overline{z}) = \frac{\mu z_1 + \mu z_2 + \cdots + \mu z_n}{n} \geq f(1, 1, \dots, 1) = 1 \iff \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \geq \frac{1}{\mu}.$$

Toisaalta ehdosta $\mu^n z_1 \cdots z_n = 1$ saadaan, että $\mu = 1/(z_1 \cdots z_n)^{1/n}$, jolloin

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \geq (z_1 z_2 \cdots z_n)^{1/n}$$

ja väite on siten osoitettu.