Vastaan kurssikyselyyn. Kiitos tästä mielenkiintoisesta kurssista, vaikka olosuhteet nyt olivat mitä olivat. Hyvää kevättä/kesää! – Sami

Tehtävä 1

Olkoon

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 \le x_1^2 < 1\} \cup \{\overline{0}\}.$$

Osoita, että Ω on polkuyhtenäinen. Onko Ω murtoviivayhtenäinen?

Ratkaisu:

Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in \Omega$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1-t)\overline{x} + t(x_1, x_1^2)$, $\eta\colon [x_1, y_1] \to \mathbb{R}^2$, $\eta(t) = (t, t^2)$ ja $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (1-t)(y_1, y_1^2) + t\overline{y}$. Asetetaan sitten $\Gamma\colon [0, y_1 - x_1 + 2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t), & 0 \le t \le 1 \\ \eta(t + x_1 - 1), & 1 \le t \le y_1 - x_1 + 1 \\ \sigma(t + x_1 - y_1 - 1), & y_1 - x_1 + 1 \le t \le y_1 - x_1 + 2 \end{cases}.$$

Nyt

$$\gamma(t) = (1-t)\overline{x} + t(x_1, x_1^2) = (x_1, t(x_1^2 - x_2) + x_2),$$

joten koska joukon Ω määritelmän mukaan $x_1^2 \ge x_2$, niin $t(x_1^2 - x_2) + x_2 > 0$. Lisäksi

$$t(x_1^2 - x_2) + x_2 = tx_1^2 + (1-t)x_2 \le x_1^2$$

ja $x_1 \le 1$, joten $|\gamma| \subset \Omega$. Selvästi $|\eta| \subset \Omega$, sillä $\overline{0} \in \Omega$. Vastaavasti

$$\sigma(t) = (1-t)(y_1, y_1^2) + t\overline{y} = (y_1, y_1^2 + t(y_2 - y_1^2)),$$

jolloin $y_1^2 + t(y_2 - y_1^2) \ge y_2 > 0$. Siispä $|\sigma| \subset \Omega$, joten myös $|\Gamma| \subset \Omega$. Lisäksi

$$\Gamma(0) = \gamma(0) = \overline{x}$$

ja

$$\Gamma(y_1 - x_1 + 2) = \sigma(1) = \overline{y}.$$

Näin ollen Ω on polkuyhtenäinen. Ω ei kuitenkaan ole murtoviivayhtenäinen. Olkoon $\overline{x}_0 = (-1/2, 1/4)$ ja $\overline{y}_0 = (1/2, 1/4)$, jolloin $\overline{x}_0, \overline{y}_0 \in \Omega$. Oletetaan, että on olemassa murtoviiva $P\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ siten, että $P(0) = \overline{x}_0$ ja $P(1) = \overline{y}_0$ sekä $|P| \subset \Omega$. Erityisesti on olemassa $T \in [0,1]$ siten, että $P(T) = (0, x_2)$ jollakin x_2. Jos $x_1 = 0$, niin Ω:n määritelmän mukaan täytyy olla $x_2 = 0$ eli

$P(T) = (0,0)$. Lisäksi jollain $T' \in [0,T[$ täytyy olla $P(T') = (x,y)$ niin, että $-1 < x < 0$ ja $1 > y > 0$. Koska P on murtoviiva, niin näitä pisteitä yhdistää suora jana $J\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$J(t) = (1-t)P(T') + tP(T) = (1-t)(x,y) + t(0,0) = (1-t)(x,y).$$

Kun $\tau = 1 - y/2x^2$, niin

$$J(\tau) = \frac{y}{2x^2}(x,y) = \left(\frac{y}{2x}, \frac{y^2}{2x^2}\right).$$

Nyt kuitenkin

$$\frac{y^2}{2x^2} > \frac{y^2}{4x^2} = \left(\frac{y}{2x}\right)^2,$$

joten $J(\tau) \notin \Omega$. Siispä $|P| \not\subset \Omega$, mikä on ristiriita, joten ei ole olemassa pisteitä $\overline{x}_0$ ja $\overline{y}_0$ yhdistävää murtoviivaa.

Tehtävä 2

Olkoot $A_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in J$ polkuyhtenäisiä ja $\overline{x}_0 \in A_j$ kaikilla $j \in J$. Osoita, että

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j \text{ on polkuyhtenäinen.}$$

Ratkaisu:

Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in A$. Tällöin joillakin $k \in J$ ja $l \in J$ pätee $\overline{x} \in A_k$ ja $\overline{y} \in A_l$. Lisäksi $\overline{x}_0 \in A_k, A_l$, joten polkuyhtenäisyydestä seuraa, että on olemassa polut $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ja $\eta \colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\gamma(a) = \overline{x} \quad \text{ja} \quad \gamma(b) = \overline{x}_0$$

sekä

$$\eta(c) = \overline{x}_0 \quad \text{ja} \quad \gamma(d) = \overline{x}.$$

Lisäksi $|\gamma| \subset A_k$ ja $|\eta| \subset A_l$, joten yhdistetylle polulle $\gamma \vee \eta \colon [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$(\gamma \vee \eta)(a) = \overline{x} \quad \text{ja} \quad (\gamma \vee \eta)(b+d-c) = \overline{y}$$

ja $|\gamma \vee \eta| \subset A_k \cup A_l \subset \bigcup_{j \in J} A_j$. Siispä A on polkuyhtenäinen.

Tehtävä 3

Olkoon γ ja ϕ ekvivalentteja paloittain sileitä polkuja ja $f\colon |\gamma| \to \mathbb{R}$ ja $F\colon |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ jatkuvia funktiota. Osoita, että

(a) $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_\phi f \, \mathrm{d}s$

(b) $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_\phi F \cdot \mathrm{d}\overline{s}$

Ratkaisu:

Merkitään $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ja $\phi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$, jolloin oletuksesta $\gamma \sim \phi$ seuraa, että on olemassa parametrinvaihtokuvaus $h\colon [a,b] \to [c,d]$ siten, että

$$\gamma(t) = \phi(h(t))$$

kaikilla $t \in [a,b]$. Ketjusäännöstä seuraa nyt, että

$$\gamma'(t) = \phi'(h(t))h'(t).$$

(a) Määritelmän nojalla

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

jolloin parametrinvaihdolla

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(h(t))) \|\phi'(h(t))h'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(h(t))) \|\phi'(h(t))\| \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Muuttujanvaihdolla saadaan sitten, että

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \, \mathrm{d}s &= \int_a^b f(\phi(h(t))) \|\phi'(h(t))\| \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{h(a)}^{h(b)} f(\phi(u)) \|\phi'(u)\| \, \mathrm{d}u \\
&= \int_c^d f(\phi(u)) \|\phi'(u)\| \, \mathrm{d}u \\
&= \int_\phi f \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

(b) Vastaavasti parametrinvaihdolla

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\overline{s} &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b F(\phi(h(t))) \cdot (\phi'(h(t))h'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big[F(\phi(h(t))) \cdot \phi'(h(t))\big]\, h'(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

jolloin muuttujanvaihdolla

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\overline{s} &= \int_a^b \big[F(\phi(h(t))) \cdot \phi'(h(t))\big]\, h'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{h(a)}^{h(b)} F(\phi(u)) \cdot \phi'(u))\,\mathrm{d}u \\
&= \int_c^d F(\phi(u)) \cdot \phi'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_\phi F \cdot \mathrm{d}\overline{s}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 4

Olkoon $\gamma\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t)$.

(a) Selvitä polun γ pituus ja käyränpituusparametrisointi.

(b) Laske $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$, kun $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Laske $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\overline{s}$, kun $F(x,y,z) = (y, -x, 1)$.

Ratkaisu:

(a) Määritelmästä

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{13}\,\mathrm{d}t = 4\pi\sqrt{13}.\end{aligned}$$

Lauseen 9.19 todistuksesta nähdään, että kun

$$g(s) = \int_0^s \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = s\sqrt{13},$$

niin

$$g^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{13}}$$

on kaarenpituusparametrisointi eli

$$\gamma(g^{-1}(t)) = \gamma\left(\frac{t}{\sqrt{13}}\right) = \left(3\cos\frac{t}{\sqrt{13}}, 3\sin\frac{t}{\sqrt{13}}, \frac{2t}{\sqrt{13}}\right).$$

(b) Suoraan määritelmästä laskemalla

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{4\pi} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{13}\int_0^{4\pi}\left(9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 4t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{13}\int_0^{4\pi}\left(9 + 4t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi\sqrt{13}\left(27 + 64\pi^2\right).\end{aligned}$$

(c) Jälleen määritelmästä

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\overline{s} &= \int_0^{4\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} (3\sin t, -3\cos t, 1) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi}\left(-9\sin^2 t - 9\cos^2 t + 2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} -7\,\mathrm{d}t = -28\pi.\end{aligned}$$

Tehtävä 5

Olkoon

$$\Omega = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(t, \sin\frac{1}{t}\right) : t \in]0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Osoita, että Ω ei ole polkuyhtenäinen.

Ratkaisu:

Tehdään vastaoletus, että Ω on polkuyhtenäinen. Tällöin on olemassa $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ siten, että $\gamma(a) = \overline{0}$ ja $\gamma(b) = (1/2\pi, \sin 2\pi) = (1/2\pi, 0) \in \Omega$. γ on jatkuva, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa $t_1 \in]a,b[$ siten, että $\gamma_1(t_i) = 2/5\pi < \gamma_1(b)$. Edelleen on olemassa $t_2 \in]a, t_1[$ siten, että $\gamma_1(t_2) = 2/7\pi < \gamma_1(t_1)$. Näin jatkamalla saadaan, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $t_n \in]a, t_{n-1}[$ siten, että

$$\gamma_1(t_n) = \frac{2}{(2n+3)\pi} < \frac{2}{(2n+1)}\pi = \gamma_1(t_{n-1}).$$

Lisäksi $t_n > a$, joten siis $a < t_n < t_{n-1}$. Näin saatu lukujono (t_n) on siis alhaalta rajoitettu vähenevä jono, jolloin on olemassa $t_\infty \in [a,b]$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} t_n =: t_\infty.$$

Erityisesti, koska γ on jatkuva, pätee, että

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \gamma\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = \gamma(t_\infty) \in \Omega.$$

Kuitenkin, kun $\gamma_1(t_n) = \frac{2}{(2n+3)\pi}$, niin

$$\gamma_2(t_n) = \sin\left(\frac{2n+3}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}.$$

Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \left(\lim_{n\to\infty} t_n, \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{t_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+3)\pi}, \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}\right).$$

Raja-arvoa $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ ei kuitenkaan ole olemassa, joten erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) \notin \Omega,$$

mikä on ristiriita. Siispä Ω ei ole polkuyhtenäinen.

Tehtävä 6

Olkoon γ sellainen polku, joka kulkee pisteestä $(1,1)$ pisteeseen $(1,-1)$ ympyrän $x^2+y^2=2$ määräämistä kaarista lyhyempää pitkin. Parametrisoi sileä polku $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$ ja laske

$$\int_\gamma (e^y\cos(xe^y), xe^y\cos(xe^y))\cdot \mathrm{d}\overline{s}.$$

Ratkaisu:

Parametrisoidaan ensin sileä polku. Vastapäivään kierrettäessä ympyränkaarelle on parametrisaatio $\tilde{\gamma}\colon \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}^2$,

$$\tilde{\gamma}(t)=\left(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t\right).$$

Myötäpäivään kierrettäessä

$$\tilde{\gamma}(t)=\left(\sqrt{2}\cos(-t),\sqrt{2}\sin(-t)\right)=\left(\sqrt{2}\cos t,-\sqrt{2}\sin t\right).$$

Tästä nähdään, että polun voi parametrisoida myös niin, että $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t)=\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right),-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Olkoon sitten $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$F(x,y)=\left(e^y\cos(xe^y),xe^y\cos(xe^y)\right).$$

Nyt

$$\partial_2F_1(x,y)-\partial_1F_2(x,y)=0,$$

joten Tehtävän 7 perusteella F on konservatiivinen. Lisäksi

$$\int F_1(x,y)\,\mathrm{d}x=\sin\left(xe^y\right)=\int F_2(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

joten olkoon $\phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\phi(x,y)=\sin\left(xe^y\right)$. Tällöin $F(x,y)=\nabla\phi(x,y)$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, joten koska ϕ on selvästi jatkuvasti derivoituva, Lauseen 10.7 nojalla

$$\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}\overline{s}=\phi(\gamma(1))-\phi(\gamma(0))=\phi(1,-1)-\phi(1,1)=\sin(1/e)-\sin(e).$$

Tehtävä 7

Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi joukko, $\overline{0} \in \Omega$ ja $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva kuvaus.

(a) Osoita, että jos on olemassa differentioituva funktio $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $\nabla u(\overline{x}) = f(\overline{x})$, niin

$$\partial_i f_j(\overline{x}) = \partial_j f_i(\overline{x}) \text{ kaikilla } \overline{x} \in \Omega \text{ ja kaikilla } i, j$$

(b) Osoita edellisen kohdan käänteinen tulos.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Jos $i = j$, niin väite seuraa suoraan. Oletetaan siis, että $i \neq j$. Tällöin Clairaut'n lauseen mukaan

$$\partial_i f_j(\overline{x}) = \partial_i \partial_j u(\overline{x}) = \partial_j \partial_i u(\overline{x}) = \partial_j f_i(\overline{x}),$$

sillä oletuksen mukaan $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

(b) Olkoon $\overline{x} \in \Omega$. Koska Ω on konveksi, pätee polulle $J\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $J(t) = (1-t)\overline{0} + t\overline{x} = t\overline{x} \in \Omega$ kaikilla $t \in [0,1]$. Asetetaan sitten $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$u(\overline{x}) = \int_J f \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_0^1 f(t\overline{x}) \cdot \overline{x} \, \mathrm{d}t.$$

Merkitään lisäksi $\psi\colon \Omega \times [0,1]$, $\psi(\overline{x}, t) = f(t\overline{x}) \cdot \overline{x}$, jolloin

$$u(\overline{x}) = \int_0^1 \psi(\overline{x}, t) \, \mathrm{d}t.$$

Tällöin derivaatan määritelmästä ja integraalien additiivisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\partial_i u(\overline{x}) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(\overline{x} + h\overline{e}_i) - u(\overline{x})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^1 \psi(\overline{x} + h\overline{e}_i, t) \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \psi(\overline{x}, t) \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \int_0^1 \frac{\psi(\overline{x} + h\overline{e}_i) - \psi(\overline{x}, t)}{h} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että $\partial_i u(\overline{x}) = \int_0^1 \partial_i \psi(\overline{x}, t) \, \mathrm{d}t$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(\overline{x} + h\overline{e}_i, t) - \psi(\overline{x}, t)}{h} = \partial_i \psi(\overline{x}, t),$$

niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left|\frac{\psi(\overline{x}+h\overline{e}_i,t)-\psi(\overline{x},t)}{h}-\partial_i\psi(\overline{x},t)\right|<\epsilon$$

kaikilla $0<|h|<\delta$. Lisäksi $\partial_i\psi(\overline{x},t)$ on jatkuva, joten kuvaus $t\mapsto\partial_i\psi(\overline{x},t)$ on kompaktilla välillä $[0,1]$ tasaisesti jatkuva. Erityisesti tällä välillä δ ei riipu muuttujasta t, joten integraalien kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{\psi(\overline{x}+h\overline{e}_i,t)-\psi(\overline{x},t)}{h}\,\mathrm{d}t-\int_0^1\partial_i\psi(\overline{x},t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1\left(\frac{\psi(\overline{x}+h\overline{e}_i,t)-\psi(\overline{x},t)}{h}-\partial_i\psi(\overline{x},t)\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\le \int_0^1\left|\frac{\psi(\overline{x}+h\overline{e}_i,t)-\psi(\overline{x},t)}{h}-\partial_i\psi(\overline{x},t)\right|\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^1\epsilon\,\mathrm{d}t=\epsilon\end{aligned}$$

kaikilla $0<|h|<\delta$. Siispä

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1\frac{\psi(\overline{x}+h\overline{e}_i,t)-\psi(\overline{x},t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\partial_i\psi(\overline{x},t)\,\mathrm{d}t$$

eli

$$\partial_i(u\overline{x})=\int_0^1\partial_i\psi(\overline{x},t)\,\mathrm{d}t.$$

Toisaalta oletuksen $\partial_j f_i(\overline{x})=\partial_i f_j(\overline{x})$ nojalla

$$\begin{aligned}\partial_i\psi(\overline{x},t)&=\partial_i(f(t\overline{x})\cdot\overline{x})=\partial_i\sum_{k=1}^n f_k(t\overline{x})x_k\\ &=\partial_i(f_i(t\overline{x})x_i)+\sum_{k\neq i}\partial_i(f_k(t\overline{x}))x_k\\ &=f_i(t\overline{x})+\sum_{k=1}^n t\partial_k f_i(t\overline{x})x_k\\ &=\partial_t(tf_i(t\overline{x})).\end{aligned}$$

Näin ollen Analyysin peruslauseen mukaan

$$\partial_i u(\overline{x})=\int_0^1\partial_i\psi(\overline{x},t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\partial_t(tf_i(t\overline{x}))\,\mathrm{d}t=[tf_i(t\overline{x})]_{t=0}^1=f_i(\overline{x}).$$

Siispä $\nabla u(\overline{x})=f(\overline{x})$ ja saatiin väite.